



TITLE:

# 確率論的手法による炉心解析に関する研究( Dissertation\_全文 )

AUTHOR(S):

長家, 康展

---

CITATION:

長家, 康展. 確率論的手法による炉心解析に関する研究. 京都大学, 2012, 博士(工学)

ISSUE DATE:

2012-11-26

URL:

<https://doi.org/10.14989/doctor.k17234>

RIGHT:

# 確率論的手法による炉心解析に関する研究

2012年

長家 康展





# 目次

第 1 章	序論	1
1.1	研究の背景と目的	1
1.2	論文の構成	3
第 2 章	粒子輸送モンテカルロ法の基礎式	5
2.1	積分型輸送方程式の導出	5
2.1.1	時間依存の場合	5
2.1.2	定常の場合	8
2.2	衝突密度方程式と放出密度方程式	10
2.3	ノイマン級数解	13
2.4	散乱カーネル	15
2.5	固有値問題	16
2.5.1	放出密度方程式に対する固有値問題	16
2.5.2	衝突密度方程式に対する固有値問題	19
2.6	実効増倍率の評価	22
2.6.1	中性子生成率比による実効増倍率	22
2.6.2	中性子バランス比による実効増倍率	25
2.6.3	アナログモンテカルロ法におけるスコアリング	28
2.6.4	非アナログモンテカルロ法におけるスコアリング	30
2.6.5	世代間の規格化	32
第 3 章	モンテカルロ摂動計算手法における源摂動評価手法の開発	35
3.1	緒言	35
3.2	相関サンプリング法による実効増倍率変化量の評価手法	36
3.2.1	定式化	36
3.2.2	源摂動のスコアリング	40
3.2.3	アルゴリズム	40
3.2.4	誤差評価	43
3.3	微分演算子サンプリング法による実効増倍率変化量の評価手法	43
3.3.1	実効増倍率変化量の Taylor 級数表現	43
3.3.2	実効増倍率に対する 1 次の微分係数	44
3.3.3	1 次微分係数に対するスコアリング	47
3.3.4	核分裂源の 1 次微分係数に対するスコアリング	50
3.3.5	アルゴリズム	51

3.3.6	実効増倍率に対する 2 次の微分係数 . . . . .	54
3.3.7	2 次微分係数に対するスコアリング . . . . .	55
3.3.8	誤差評価 . . . . .	58
3.4	1 群モンテカルロ法での検証 . . . . .	58
3.4.1	1 群 3 領域の無限平板体系 . . . . .	58
3.5	連続エネルギーモンテカルロ法での検証 . . . . .	60
3.5.1	Godiva 炉心 . . . . .	61
3.5.2	簡略化された STACY 炉心 . . . . .	67
3.6	結言 . . . . .	70
<b>第 4 章</b>	<b>微分演算子サンプリング法によるサンプル反応度価値の評価 . . . . .</b>	<b>75</b>
4.1	緒言 . . . . .	75
4.2	高次微分係数評価手法 . . . . .	76
4.2.1	実効増倍率に対する高次の微分係数 . . . . .	76
4.2.2	$n$ 次微分係数に対するスコアリング . . . . .	78
4.2.3	核分裂源の $n$ 次微分係数に対するスコアリング . . . . .	80
4.2.4	誤差評価 . . . . .	81
4.3	ベンチマーク計算 . . . . .	82
4.3.1	Godiva 炉心 . . . . .	82
4.3.2	Jezebel 炉心 . . . . .	83
4.3.3	TCA 炉心 . . . . .	85
4.4	代替アプローチ . . . . .	88
4.4.1	Padé 近似 . . . . .	88
4.4.2	中央点法と中間点法 . . . . .	91
4.5	結言 . . . . .	92
	付録: (4.6) 式の導出 . . . . .	94
<b>第 5 章</b>	<b>次世代核分裂確率に基づく実効遅発中性子割合計算手法の理論的考察と比較 . . . . .</b>	<b>97</b>
5.1	緒言 . . . . .	97
5.2	理論的考察 . . . . .	98
5.2.1	通常 of $\beta_{\text{eff}}$ の定義 . . . . .	98
5.2.2	Meulekamp の手法と名内の手法 . . . . .	99
5.3	数値計算による検証 . . . . .	100
5.3.1	ベンチマーク体系と計算手法 . . . . .	100
5.3.2	モンテカルロ法と決定論的手法による結果の比較 . . . . .	102
5.3.3	インポートランス重みと随伴中性子束重みの遅発中性子割合の比較 . . . . .	103
5.4	結言 . . . . .	112
<b>第 6 章</b>	<b>モンテカルロ摂動計算手法による実効遅発中性子割合計算手法の開発 . . . . .</b>	<b>115</b>
6.1	緒言 . . . . .	115
6.2	微分演算子サンプリング法を用いた実効遅発中性子割合計算手法 . . . . .	116

6.2.1	基礎式の導出 . . . . .	116
6.2.2	モンテカルロコードへの実装 . . . . .	117
6.3	相関サンプリング法を用いた実効遅発中性子割合計算手法 . . . . .	119
6.3.1	即発増倍率比法 (Prompt $k$ -ratio method) . . . . .	119
6.3.2	モンテカルロコードへの実装 . . . . .	120
6.4	検証計算 . . . . .	122
6.4.1	ベンチマーク体系と計算手法 . . . . .	122
6.4.2	計算結果 . . . . .	123
6.5	結言 . . . . .	127
第 7 章	結論 . . . . .	131
参考文献	. . . . .	135
謝辞	. . . . .	143





# 表 目 次

3.1	3 領域無限平板体系において中央領域の密度を 0.1%減少させたときの実効増倍率変化量の比較 . . . . .	60
3.2	3 領域無限平板体系において中央領域の密度を 10%減少させたときの実効増倍率変化量の比較 . . . . .	60
3.3	STACY 炉心に対する原子数密度 . . . . .	69
4.1	Godiva 炉心に対するボイド反応度価値 (完全ボイド化) を計算したときの参照解と微分演算子サンプリング法による結果の比較 . . . . .	82
4.2	Jezebel 炉心に対するサンプル反応度価値を計算したときの参照解と微分演算子サンプリング法による結果の比較 . . . . .	84
4.3	TCA 炉心に対する Np-237 サンプル反応度価値を計算したときの参照解と微分演算子サンプリング法による結果の比較 . . . . .	86
4.4	TCA 炉心に対する Np-237 サンプル反応度価値を計算したときの参照解と Padé 近似解の比較 . . . . .	91
4.5	TCA 炉心の Np-237 サンプル反応度価値に対する参照解と Taylor 級数近似を用いた中央点法と中間点法による結果の比較 . . . . .	92
4.6	Taylor 級数近似を用いた中間点法によって計算した正側と負側の反応度価値と参照解の比較 . . . . .	93
4.7	Padé 近似を用いた中間点法によって計算した正側と負側の反応度価値と参照解の比較 . . . . .	93
5.1	Meulekamp の手法を用い、MVP コードと CBG コードで計算したインポートランス重みの遅発中性子割合の比較 . . . . .	102
5.2	名内の手法を用い、MVP コードと CBG コードで計算したインポートランス重みの遅発中性子割合の比較 . . . . .	103
5.3	CBG コードで計算したインポートランス重みの遅発中性子割合と実効遅発中性子割合の比較 . . . . .	104
6.1	微分演算子サンプリング法と決定論的手法で計算した $\beta_{\text{eff}}$ の比較 . . . . .	123
6.2	相関サンプリング法と決定論的手法で計算した $\beta_{\text{eff}}$ の比較 . . . . .	124



# 目 次

2.1	積分型輸送方程式を導出する際の位置関係	7
3.1	相関サンプリング法で源摂動効果を評価するためのアルゴリズム	42
3.2	中性子が物質境界を横切って衝突する場合	48
3.3	微分演算子サンプリング法で源摂動効果を評価するためのアルゴリズム	53
3.4	1 群 3 領域無限平板体系	59
3.5	Godiva 密度摂動問題	62
3.6	相関サンプリング法を用いて Godiva 一様摂動問題を計算した場合の、 $\Delta k_{PS}$ の源摂動反復回数に対する依存性 (誤差棒は 2 標準偏差を表している。26.0 g/cm <sup>3</sup> に対する誤差は、最初の 2 点にのみ示している。)	63
3.7	Godiva 一様摂動問題に対する参照解と相関サンプリング法の結果の比較 (誤差棒は 2 標準偏差を表している。ほとんどのケースにおいて誤差はマーカーに隠れるほど小さいが、23.5 g/cm <sup>3</sup> と 26.0 g/cm <sup>3</sup> のケースについてのみ誤差が大きい。)	63
3.8	微分演算子サンプリング法を用いて Godiva 一様摂動問題を計算した場合の、 $\partial k_{PS}/\partial a$ の源摂動反復回数に対する依存性 (誤差棒は 2 標準偏差を表している。)	65
3.9	Godiva 一様摂動問題に対する参照解と微分演算子サンプリング法の結果の比較 (誤差棒は 2 標準偏差を表している。)	65
3.10	相関サンプリング法を用いて Godiva 中心領域摂動問題を計算した場合の、 $\Delta k_{PS}$ の源摂動反復回数に対する依存性 (誤差棒は 2 標準偏差を表している。26.0 g/cm <sup>3</sup> のケースについて、誤差は最初の 6 点のみ表示している。)	66
3.11	Godiva 中心領域摂動問題に対する参照解と相関サンプリング法の結果の比較 (誤差棒は 2 標準偏差を表している。ほとんどのケースにおいて誤差はマーカーに隠れるほど小さいが、源摂動考慮した結果に対して 23.5 g/cm <sup>3</sup> と 26.0 g/cm <sup>3</sup> のケースについてのみ誤差が大きい。)	66
3.12	微分演算子サンプリング法を用いて Godiva 中心領域摂動問題を計算した場合の、 $\partial k_{PS}/\partial a$ の源摂動反復回数に対する依存性 (誤差棒は 2 標準偏差を表している。)	68
3.13	Godiva 中心領域摂動問題に対する参照解と微分演算子サンプリング法の結果の比較 (誤差棒は 2 標準偏差を表している。)	68
3.14	簡略化された STACY 炉心に対する密度摂動問題	69



3.15	相関サンプリング法を用いて STACY 水反射体摂動問題を計算した場合の、 $\Delta k_{PS}$ の源摂動反復回数に対する依存性 (誤差棒は 2 標準偏差を表している。-40%と-50%のケースについては、それぞれ最初の 4 点と 3 点のみ誤差を表示している。)	71
3.16	STACY 水反射体摂動問題に対する参照解と相関サンプリング法の結果の比較 (誤差棒は 2 標準偏差を表している。ほとんどのケースにおいて誤差はマーカーに隠れるほど小さいが、源摂動効果を考慮した-30%, -40%, -50%のケースについてのみ誤差が大きい。)	71
3.17	微分演算子サンプリング法を用いて STACY 水反射体摂動問題を計算した場合の、 $\partial k_{PS}/\partial a$ の源摂動反復回数に対する依存性 (誤差棒は 2 標準偏差を表している。)	72
3.18	STACY 水反射体摂動問題に対する参照解と微分演算子サンプリング法の結果の比較 (誤差棒は 2 標準偏差を表している。)	72
4.1	Godiva 炉心中心ボイド摂動問題に対してボイド率を変化させたときの参照解と微分演算子サンプリング法による結果の比較 (DOS: Differential Operator Sampling, PSE: Perturbed Source Effect)	83
4.2	Jezebel 炉心サンプル反応度価値問題に対してボイド率を変化させたときの参照解と微分演算子サンプリング法による結果の比較 (DOS: Differential Operator Sampling, PSE: Perturbed Source Effect)	85
4.3	TCA 炉心に対する計算体系	86
4.4	TCA 炉心のサンプル反応度価値問題に対してサンプル密度を変化させたときの参照解と微分演算子サンプリング法による結果の比較 (源摂動効果を考慮していない場合)	87
4.5	TCA 炉心のサンプル反応度価値問題に対してサンプル密度を変化させたときの参照解と微分演算子サンプリング法による結果の比較 (源摂動効果を考慮した場合)	88
4.6	TCA 炉心のサンプル反応度価値問題に対する Taylor 級数 2 次近似と [1/1] Padé 近似の比較	90
4.7	TCA 炉心のサンプル反応度価値問題に対する Taylor 級数 4 次近似と [2/2] Padé 近似の比較	90
5.1	Godiva 炉心中心点における、Meulekamp と名内の手法によって計算されたインポートランス関数と随伴中性子束のエネルギースペクトルの比較	105
5.2	Godiva 炉心に対する、核分裂スペクトルで規格化された随伴中性子束とインポートランス関数の比較	106
5.3	Godiva 炉心中心における、遅発中性子源と全核分裂源のエネルギースペクトルの比較	107
5.4	Godiva 炉心に対する、全核分裂源で規格化された随伴中性子束とインポートランス関数の比較 ( $E = 498\text{--}639\text{ keV}$ )	107

5.5	Flat-top-U 炉心に対する、核分裂スペクトルで規格化された随伴中性子束とインポートランス関数の比較 . . . . .	108
5.6	Flat-top-U 炉心に対する、全核分裂源で規格化された随伴中性子束とインポートランス関数の比較 . . . . .	110
5.7	Unreflected-Sphere-U 炉心に対する、核分裂スペクトルで規格化された随伴中性子束とインポートランス関数の比較 . . . . .	111
5.8	Unreflected-Sphere-U 炉心に対する、全核分裂源で規格化された随伴中性子束とインポートランス関数の比較 ( $E = 498\text{--}639\text{ keV}$ ) . . . . .	112
5.9	Reflected-Sphere-U 炉心に対する、核分裂スペクトルで規格化された随伴中性子束とインポートランス関数の比較 . . . . .	113
5.10	Reflected-Sphere-U 炉心に対する、全核分裂源で規格化された随伴中性子束とインポートランス関数の比較 ( $E = 498\text{--}639\text{ keV}$ ) . . . . .	114
6.1	微分演算子サンプリング法を用いて計算した $\beta_{\text{eff}}$ の源摂動反復回数に対する依存性 . . . . .	125
6.2	相関サンプリング法を用いて計算した $\beta_{\text{eff}}$ の源摂動反復回数に対する依存性 . . . . .	128





# 第1章 序論

## 1.1 研究の背景と目的

原子力プラントの核設計では、様々な核特性を高精度で評価することが求められる。そのため、原子炉の炉心解析においては、方程式を差分化するなどして数値的に解く決定論的手法とともに、中性子輸送をシミュレーションして統計的に核特性を評価する確率論的手法（モンテカルロ法）がよく用いられる。モンテカルロ法には、高精度計算を可能にする注目すべき優れた利点がある。モンテカルロ法は、確率的な事象を忠実に模擬することにより、興味のある物理量を評価する手法であるので、決定論的手法のように物理現象を記述する方程式を差分化して解く必要はない。それゆえ、決定論的手法では複雑すぎて解けないような問題もモンテカルロ法では解くことができるようになる。また、位相空間（空間、エネルギー、時間等）を離散化する必要がないので、計算体系を正確に記述できるという利点がある。従って、物理事象を正確にモデル化しておけば、解法上の近似を伴わない物理量を求めることが可能となる。

このような利点を持つモンテカルロ法であるが、最近開発された新しい手法ではない。モンテカルロ法に関連した統計手法の起源は古く、18世紀にまでさかのぼる。18世紀後半、Buffon は平行線に何回も針を投げ、針が平行線と交わる確率から実験的に円周率  $\pi$  を求める方法を編み出した [1]。この実験は“Buffon の針実験”としてよく知られている。19世紀後半になると、Lord Rayleigh は、吸収妨害物 (absorbing barriers) のない1次元のランダムウォークが2次微分方程式の近似解を与えることを示した [2]。20世紀に入ると統計的手法に関する研究は盛んに行われた。Lord Kelvin は、気体の運動理論に現れる時間積分を実行するためにランダムサンプリングを用いた [3]。Courant ら [4]、Kolmogorov [5]、Petrowsky [6] は、ランダムウォーク過程やマルコフ連鎖過程と微分方程式の関係を明らかにしていった。また、Fermi は、1930年代前半、ローマにおいて中性子拡散に関する研究で統計的手法を用いていた。

しかしながら、まだこの当時、電子計算機はなく、モンテカルロ法の基礎も確立していなかった。それが確立したのは1940年代に入ってからである。1945年に世界初の汎用電子計算機 ENIAC が完成し、von Neumann と Ulam はその電子計算機上でランダムウォーク過程に基づくサンプリング実験を行うことを提案した。また、von Neumann、Ulam、Metropolis はモンテカルロ法の数学的な基礎を確立した [7, 8]。モンテカルロ法という名前は、この頃 Metropolis によって提案され、この統計的手法を表わす言葉として用いられるようになった [9]。

モンテカルロ法は、常に計算機の進歩と共に発展をとげ、現在では様々な分野で用いられるようになっている。最初に応用された原子力分野（炉心解析、臨界安全、遮蔽解析）はも



ちろんのこと、放射線防護や粒子線照射などの医療分野、統計物理、素粒子物理、プラズマ物理、宇宙物理などの基礎科学分野、更には石油探査、金融工学の分野でも用いられるようになってきている。このようにモンテカルロ法の利用範囲が広まった一因は計算機技術の進歩にある。モンテカルロ法は統計的手法であるので、その計算結果にはばらつき（統計誤差）があり、結果の精度を上げようとする、必然的に試行回数を増やさなければならず、その結果、非常に長い計算時間が必要になる。これはモンテカルロ法の欠点であるが、ベクトル化や並列化といった計算機技術の進歩と最近の低価格で高性能のパーソナルコンピュータの出現により、現実的な時間で十分な精度の結果が得られるようになってきている。

このように計算機のハードウェアとソフトウェアの急速な進歩により、モンテカルロ法の欠点である大きな計算コストを克服できたかに思えるが、原子炉の炉心設計分野においては、まだまだ不十分である。2003年のMathematics & Computation 国際会議において、K. Smith氏が講演で話したように、炉心設計では、1運転サイクル当たり約1万ケースに及ぶ計算が必要で、それを日常的にこなしていかなければならない[10]。K. Smith氏は、上記の会議において、軽水炉設計でモンテカルロ計算を現実的に（シングルCPUで1時間）行えるようになるのは、2030年とも予想した。（これは、Kord Smith's challengeと呼ばれている。）また、炉心設計では、実効増倍率のみならず、出力分布、ピーキング係数、各種反応度係数など多くの核特性を評価（静特性解析）しなければならず、更には、過渡解析や燃焼解析も行わなければならない。現在の計算機能力で、モンテカルロ法により精度よく計算できる核特性は、実効増倍率、特定領域における反応率、中性子束ぐらいである。

更なる計算機の進歩を考えれば、モンテカルロ法で計算できる核特性は今後ますます増えることが予想される。また、予算面と核セキュリティ面から、核物質を用いた臨界実験の実施がますます困難になりつつある現状では、計算機科学を応用し、高精度のシミュレーションを行うことにより、実際の炉物理実験ではなく、数値実験を行うことも将来予想される。実際、米国は、CASL(Consortium of Advanced Simulation of Light Water Reactors) [11]を立ち上げ、産官学が協力して“Virtual Reactor(VR)” [12, p.12]を開発することを計画しており、大規模な数値シミュレーションにより仮想的な原子炉プラントを模擬しようとしている。この計画では、忠実度を増した手法 (increased fidelity methods) により統合マルチフィジクス・モデリング&シミュレーション環境を開発することを目指しており [13, p.3]、VRロードマップでは、核熱結合ハイブリッドモンテカルロ3次元全炉心計算も視野に入れている [12, p.36]。ヨーロッパ連合(EU)では、NURESIM計画(2005-2008) [14]で、原子炉シミュレーションのための統合プラットフォームを整備し、熱水力結合モンテカルロ計算、全炉心モンテカルロ燃焼計算を実現するために、モンテカルロ法の課題(核分裂源分布の収束性)に取り組んでいる [15, p.6]。また、それに続くNURISP計画(2009-2011) [16]においては、原子炉安全性と原子炉設計に向けた大規模モンテカルロシミュレーションを実証することが提唱されている。

本研究では、炉心解析におけるモンテカルロ法の適用範囲 (area of applicability) を拡張するため、モンテカルロ法で評価することが困難である微小反応度価値と実効遅発中性子割合 (いわゆる  $\beta_{\text{eff}}$ ) に焦点を当てる。反応度価値は、摂動系と非摂動系における実効増倍率の逆数の差から直接計算することができるが、モンテカルロ法は、計算結果に統計誤差を伴うが



ゆえに、反応度価値の大きさが小さくなればなるほど直接計算による評価は難しくなる。このような困難に対処するため手法として、古くから相関サンプリング法 [17, p.129] や微分演算子サンプリング法 [18] といったモンテカルロ摂動計算手法が知られているが、実効増倍率を計算する固有値問題（外部源がなく、核分裂源のみが存在する体系）に対しては、核分裂源分布（固有関数）が摂動によっても変化しないという仮定に基づいて反応度が計算されることがほとんどであり、この仮定は実際の炉心計算において妥当でないことが多い。本研究のモンテカルロ摂動計算手法の開発では、従来より提案されているモンテカルロ摂動計算手法を見直し、摂動による核分裂源分布の変化（源摂動効果）を考慮できるように定式化を行い、源摂動効果を評価する新しい手法を提案する。

実効遅発中性子割合は、原子炉の動特性解析における一点炉動特性方程式の重要なパラメータであり、静特性解析におけるドル単位の反応度価値を  $\Delta k/k$  単位の反応度価値に変換するときの変換係数でもあり、炉心解析上、非常に重要な核特性量であるが、モンテカルロ法によって評価することは困難である。この難しさの要因は、実効遅発中性子割合が随伴関数によって重み付けられていることにあり、炉心解析におけるモンテカルロ法では、粒子輸送シミュレーションにより物理量を評価するため、随伴関数によって重み付けられた物理量がどのような量であるのか物理的な解釈が必要となる。近年、Keepin [19] や Hurwitz [20] によって与えられた物理的解釈に基づいて随伴関数重みの物理量をモンテカルロ法で計算する試みがいくつかなされているが [21, 22]、解釈が言葉のみで与えられているがゆえに、研究者に依存した様々な解釈によるモンテカルロコードへの実装が行われている。本研究では、これまで提案されている次世代核分裂確率に基づく実効遅発中性子割合の計算手法について理論的基盤を構築し、どのような近似が適用されているのかを明らかにし、計算ベンチマークにより理論的基盤の正当性と近似の精度について数値的にも実証する。更に、そのような物理的解釈を要しない、モンテカルロ摂動計算手法に基づく新たな実効遅発中性子割合計算手法を提案し、ベンチマーク計算を実施することにより、新たに開発した手法の適用性を検証する。

## 1.2 論文の構成

本論文の構成は、以下のとおりである。第2章で、粒子輸送モンテカルロ法で実効増倍率を計算するための数学的基盤を構築する。第3章では、第2章で構築したモンテカルロ法の理論的表現を基に、モンテカルロ法による摂動計算手法の代表的手法である相関サンプリング法と微分演算子サンプリング法を定式化し、これらの手法を用いて源摂動効果を計算する新しい手法を提案する。また、ベンチマーク計算を行い、新しい手法の適用性を評価、源摂動効果を定量的に評価する。第4章では、モンテカルロ法による摂動計算手法を実際の実験解析等に適用するため、微分演算子サンプリング法のサンプル反応度価値計算に対する適用性を評価する。サンプル反応度価値の計算では、密度が100%変化する摂動問題を取り扱うため、微分演算子サンプリング法により、高次のTaylor級数項を計算できるように定式化を拡張する。第5章では、Meulekampらと名内らによって提案された、次世代核分裂確率に基づく実効遅発中性子割合の計算手法を理論的に考察し、また、数値計算によってこれらの手

法と通常の実効遅発中性子割合を比較する。第 6 章では、実効遅発中性子割合の新しい計算手法を提案し、ベンチマーク計算によりその適用性を評価する。第 7 章では、本研究で得られた成果をまとめる。



## 第2章 粒子輸送モンテカルロ法の基礎式

中性子の輸送は、輸送方程式や拡散方程式によって記述される。決定論的手法では、これらの方程式を離散化することにより数値的に解き、中性子束や反応率を計算する。一方、モンテカルロ法では、粒子と原子核の反応を記述する様々な物理モデルに従って粒子の輸送をシミュレーションし、中性子束や反応率を計算する。従って、モンテカルロ法では、決定論的手法のように輸送方程式や拡散方程式を陽には解かない。中性子束や反応率は、物理的な量である粒子の飛程長や反応の数をスコアリング\*し、それらの平均値から計算する。しかし、後述するモンテカルロ摂動計算手法の1つである微分演算子サンプリング法において、スコアリングすべき量は物理的に表現することは困難である。また、実効遅発中性子割合をモンテカルロ法で評価するときも、スコアリングすべき量を正確に把握することは難しい。この章では、後述するモンテカルロ計算手法の数学的基礎を明らかにするため、炉物理の教科書でよく見られる微積分型輸送方程式から積分型輸送方程式を導出し、そこからモンテカルロシミュレーションを記述するのに適した衝突密度方程式のノイマン級数解を導出する。また、第3章で新たに提案する源摂動評価手法をモンテカルロコードに実装するために、通常の粒子輸送モンテカルロコードで行われている実効増倍率に対するスコアリングの方法をノイマン級数解に基づいて説明し、核分裂源反復においてどのような規格化が行われているのかを述べる。

### 2.1 積分型輸送方程式の導出

#### 2.1.1 時間依存の場合

原子炉物理の教科書でよく見かける微積分型中性子輸送方程式 [23, p.466] から積分型輸送方程式を導出する。時間依存中性子輸送方程式は以下の式で表される。

$$\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \Phi(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t) + L\Phi(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t) = S(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t) \quad (2.1)$$

ここで、 $\Phi(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t)$  は、位置  $\mathbf{r}$ 、エネルギー  $E$ 、飛行方向  $\boldsymbol{\Omega}$ 、時刻  $t$  における角度中性子束 (angular flux) である。 $v$  は、中性子速さで、正確には  $v = v(E)$  である。演算子  $L$  は、正味の消滅演算子 (net-loss operator) [24, p.343] で、次式で定義される。

$$L\Phi(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t) \equiv \boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla \Phi(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t) + \Sigma_t(\mathbf{r}, E, t)\Phi(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t) - S_s(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t) \quad (2.2)$$

$$S_s(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t) \equiv \int dE' \int d\boldsymbol{\Omega}' \Sigma_s(\mathbf{r}, E \leftarrow E', \boldsymbol{\Omega} \leftarrow \boldsymbol{\Omega}', t)\Phi(\mathbf{r}, E', \boldsymbol{\Omega}', t) \quad (2.3)$$

---

\*統計処理をするために着目している物理量を積算することである。



ここで、 $\Sigma_t$  は全断面積、 $\Sigma_s$  は散乱断面積である。 $S_s$  は散乱源 (scattering source) を表し、上式から分かるように、 $L\Phi$  は、漏れと衝突によって位相空間から出て行く中性子の数から散乱源を差し引いたものになっている。(2.1) 式右辺の項  $S(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t)$  は、中性子源を表し、以下のように定義される。

$$S(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t) = S_e(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t) + S_f(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t) \quad (2.4)$$

$S_e$  は外部源 (extraneous source) を表し、 $S_f$  は核分裂源 (fission source) を表している。核分裂源は、更に即発核分裂中性子源と遅発中性子先行核から来る中性子源 (遅発中性子源) に分割することができ、以下のように表すことができる。

$$S_f(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t) = S_f^p(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t) + \sum_i S_{f,i}^d(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t) \quad (2.5)$$

右辺第 1 項が即発核分裂中性子源で、以下のように表される。

$$S_f^p(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t) = \int dE' \int d\boldsymbol{\Omega}' \sum_k \chi_p^k(E \leftarrow E', \boldsymbol{\Omega}) \nu_p^k(E') \Sigma_f^k(\mathbf{r}, E', t) \Phi(\mathbf{r}, E', \boldsymbol{\Omega}', t) \quad (2.6)$$

ここで、 $\chi_p^k$  は核種  $k$  の即発核分裂スペクトル、 $\nu_p^k$  は 1 即発核分裂当りに放出される中性子数 (multiplicity)、 $\Sigma_f^k$  は核種  $k$  の微視的核分裂断面積  $\sigma_f^k$  と数密度  $N^k$  により以下のように定義される。

$$\Sigma_f^k(\mathbf{r}, E, t) = \sigma_f^k(E, t) N^k(\mathbf{r}) \quad (2.7)$$

(2.5) 式の右辺第 2 項は、遅発中性子源で、以下のように表される。

$$S_{f,i}^d(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t) = \sum_k \chi_{d,i}^k(E, \boldsymbol{\Omega}) \lambda_i^k C_i^k(\mathbf{r}, t) \quad (2.8)$$

$C_i^k$  は核種  $k$  の核分裂に起因する第  $i$  群 (family) の遅発中性子先行核、 $\chi_{d,i}^k$  は核種  $k$  の核分裂に起因する第  $i$  群先行核からの遅発中性子スペクトル、 $\lambda_i^k$  は核種  $k$ 、先行核第  $i$  群の崩壊定数である。遅発中性子先行核は、以下のバランス方程式から求められる。

$$\frac{\partial C_i^k}{\partial t} + \lambda_i^k C_i^k(\mathbf{r}, t) = \int dE' \int d\boldsymbol{\Omega}' \nu_{d,i}^k(E') \Sigma_f^k(\mathbf{r}, E', t) \Phi(\mathbf{r}, E', \boldsymbol{\Omega}', t) \quad (2.9)$$

ここで、 $\nu_{d,i}^k$  は、核種  $k$  の核分裂に起因する第  $i$  群先行核からの遅発中性子核分裂収率である。遅発中性子スペクトル  $\chi_{d,i}^k$ 、崩壊定数  $\lambda_i^k$ 、遅発中性子核分裂収率  $\nu_{d,i}^k$  は、通常、遅発中性子先行核群  $i$  にのみ依存するとして定式化されるが、ここでは、評価済み核データに基づく連続エネルギーモンテカルロ法による微視的な取り扱いを表現するために核種  $k$  に対する依存性を陽に示している。

(2.1) 式は微積分型輸送方程式であり、これを積分型輸送方程式に変形する [23, p.22] [25, p.209]。まず、(2.1) 式を以下のように書き直す。

$$\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \Phi(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t) + \boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla \Phi(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t) + \Sigma_t(\mathbf{r}, E, t) \Phi(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t) = q(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t) \quad (2.10)$$

$$q(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t) \equiv S_s(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t) + S(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t) \quad (2.11)$$

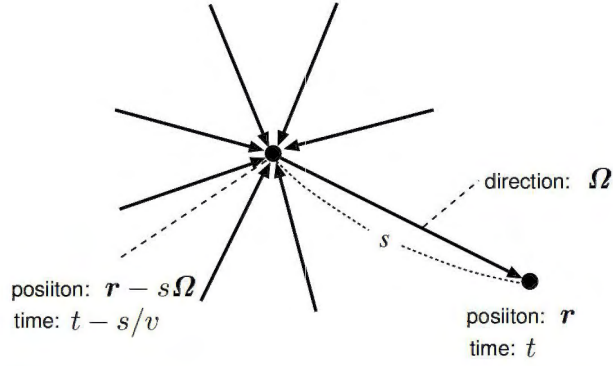


図 2.1: 積分型輸送方程式を導出する際の位置関係

$q$  は、散乱源を含めた中性子放出密度を表している。(2.10) 式を積分型輸送方程式に変形するには少し視点を変えてやればよい。即ち、 $(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t)$  における角度中性子束は、図 2.1 に示すように、中性子の飛んでくる方向に距離  $s$  だけさかのぼった点  $\mathbf{r} - s\boldsymbol{\Omega}$  から衝突せずに位置  $\mathbf{r}$  にやってくる中性子を考え、 $s$  について積分して記述することができる。そこで、位相空間  $(\mathbf{r} - s\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\Omega}, E, t - s/v)$  における輸送方程式を考える。

$$\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t'} \Phi(\mathbf{r}', E, \boldsymbol{\Omega}, t') + \boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla' \Phi(\mathbf{r}', E, \boldsymbol{\Omega}, t') + \Sigma_t(\mathbf{r}', E, t') \Phi(\mathbf{r}', E, \boldsymbol{\Omega}, t') = q(\mathbf{r}', E, \boldsymbol{\Omega}, t') \quad (2.12)$$

ここで、

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - s\boldsymbol{\Omega} \quad (2.13)$$

$$t' = t - s/v \quad (2.14)$$

とした。角度中性子束の微分項は以下のように変形できる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} \Phi(\mathbf{r}', E, \boldsymbol{\Omega}, t') &= \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{r}'} \frac{\partial \mathbf{r}'}{\partial s} + \frac{\partial \Phi}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial s} \\ &= \nabla' \Phi \cdot \frac{\partial \mathbf{r}'}{\partial s} + \frac{\partial \Phi}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial s} \end{aligned} \quad (2.15)$$

また、(2.13)、(2.14) 式より

$$\frac{\partial \mathbf{r}'}{\partial s} = -\boldsymbol{\Omega} \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial t'}{\partial s} = -\frac{1}{v} \quad (2.17)$$

であるから

$$\frac{\partial}{\partial s} \Phi(\mathbf{r}', E, \boldsymbol{\Omega}, t') = -\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla' \Phi(\mathbf{r}', E, \boldsymbol{\Omega}, t') - \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t'} \Phi(\mathbf{r}', E, \boldsymbol{\Omega}, t') \quad (2.18)$$

となる。よって、(2.12) 式は

$$-\frac{\partial}{\partial s} \Phi(\mathbf{r}', E, \boldsymbol{\Omega}, t') + \Sigma_t(\mathbf{r}', E, t') \Phi(\mathbf{r}', E, \boldsymbol{\Omega}, t') = q(\mathbf{r}', E, \boldsymbol{\Omega}, t') \quad (2.19)$$

となる。両辺に積分因子をかけ、

$$\begin{aligned} \exp\left(-\int_0^s \Sigma_t(\mathbf{r} - s''\boldsymbol{\Omega}, E, t - \frac{s''}{v})ds''\right) \left(-\frac{\partial}{\partial s} + \Sigma_t(\mathbf{r}', E, t')\right) \Phi(\mathbf{r}', E, \boldsymbol{\Omega}, t') \\ = q(\mathbf{r}', \boldsymbol{\Omega}, E, t') \exp\left(-\int_0^s \Sigma_t(\mathbf{r} - s''\boldsymbol{\Omega}, E, t - \frac{s''}{v})ds''\right) \end{aligned} \quad (2.20)$$

整理すると

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial s} \left\{ \exp\left(-\int_0^s \Sigma_t(\mathbf{r} - s''\boldsymbol{\Omega}, E, t - \frac{s''}{v})ds''\right) \Phi(\mathbf{r}', E, \boldsymbol{\Omega}, t') \right\} \\ = q(\mathbf{r}', \boldsymbol{\Omega}, E, t') \exp\left(-\int_0^s \Sigma_t(\mathbf{r} - s''\boldsymbol{\Omega}, E, t - \frac{s''}{v})ds''\right) \end{aligned} \quad (2.21)$$

となる。 $s$  を  $s'$  と置き換え、両辺を  $[0, s]$  の範囲で積分すると

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t) = \exp\left(-\int_0^s \Sigma_t(\mathbf{r} - s''\boldsymbol{\Omega}, E, t - \frac{s''}{v})ds''\right) \Phi(\mathbf{r}', E, \boldsymbol{\Omega}, t') \\ + \int_0^s ds' q(\mathbf{r} - s'\boldsymbol{\Omega}, E, \boldsymbol{\Omega}, t - \frac{s'}{v}) \exp\left(-\int_0^{s'} \Sigma_t(\mathbf{r} - s''\boldsymbol{\Omega}, E, t - \frac{s''}{v})ds''\right) \end{aligned} \quad (2.22)$$

となる。有限体系の場合、(2.22) 式に適当な境界条件を与えて解くことになる。無限体系の場合は、(2.22) 式において  $s \rightarrow \infty$  とすると、右辺第 1 項は消えて

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t) = \\ \int_0^\infty ds' q(\mathbf{r} - s'\boldsymbol{\Omega}, E, \boldsymbol{\Omega}, t - \frac{s'}{v}) \exp\left(-\int_0^{s'} \Sigma_t(\mathbf{r} - s''\boldsymbol{\Omega}, E, t - \frac{s''}{v})ds''\right) \end{aligned} \quad (2.23)$$

となる。 $s' \rightarrow s$ 、 $s'' \rightarrow s'$  で置き換えると、

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t) = \\ \int_0^\infty ds q(\mathbf{r} - s\boldsymbol{\Omega}, E, \boldsymbol{\Omega}, t - \frac{s}{v}) \exp\left(-\int_0^s \Sigma_t(\mathbf{r} - s'\boldsymbol{\Omega}, E, t - \frac{s'}{v})ds'\right) \end{aligned} \quad (2.24)$$

となり、積分型輸送方程式が導かれる。(2.24) 式は、(2.10) 式の微分型輸送方程式に無限遠点において、角度中性子束が 0 であるという境界条件を付加したものと等価である [25, p.210]。また、有限体系の場合でも、考えている体系の一番外側で真空境界条件を適用する場合は、体系の外側に純吸収物質があると仮定すれば、(2.24) 式を適用することが可能である。よって、以降の定式化では、無限体系に対する (2.24) 式の積分型輸送方程に基づく定式化を行う。

### 2.1.2 定常の場合

モンテカルロ法により時間依存問題を取り扱うことは可能である。パルス実験のシミュレーションのように比較的容易な問題から、取り扱いの難しい原子炉動特性問題まで、既にモンテカルロ法が適用されている。しかしながら、本研究では、定常状態の場合のモンテカルロ法のみを取り扱う。そこで、定常状態の場合の基礎式をここでレビューしておく。時間に依



存しない中性子輸送方程式は、(2.1) 式で角度中性子束の時間微分項を 0 とし、以下のようになる。

$$L\Phi(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) = S(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) \quad (2.25)$$

外部中性子源と核分裂源の和を定義した (2.4) 式は、時間変数  $t$  を消去するだけで次のようになる。

$$S(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) = S_e(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) + S_f(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) \quad (2.26)$$

核分裂源を定義した (2.5) 式も時間変数  $t$  を消去するだけで次のようになる。

$$S_f(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) = S_f^p(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) + \sum_i S_{f,i}^d(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) \quad (2.27)$$

即発核分裂中性子源と遅発中性子源を定義した (2.6) 式と (2.8) 式も以下のようになる。

$$S_f^p(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) = \int dE' \int d\boldsymbol{\Omega}' \sum_k \chi_p^k(E \leftarrow E', \boldsymbol{\Omega}) \nu_p^k(E') \Sigma_f^k(\mathbf{r}, E') \Phi(\mathbf{r}, E', \boldsymbol{\Omega}') \quad (2.28)$$

$$S_{f,i}^d(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) = \sum_k \chi_{d,i}^k(E, \boldsymbol{\Omega}) \lambda_i^k C_i^k(\mathbf{r}) \quad (2.29)$$

遅発中性子源については、以下のように変形することが可能である。遅発中性子先行核のバランス式である (2.9) 式で微分項を 0 とすることにより

$$\lambda_i^k C_i^k(\mathbf{r}) = \int dE' \int d\boldsymbol{\Omega}' \nu_{d,i}^k(E') \Sigma_f^k(\mathbf{r}, E') \Phi(\mathbf{r}, E', \boldsymbol{\Omega}') \quad (2.30)$$

となり、遅発中性子源は次式のように表すことができる。

$$S_{f,i}^d(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) = \int dE' \int d\boldsymbol{\Omega}' \sum_k \chi_{d,i}^k(E, \boldsymbol{\Omega}) \nu_{d,i}^k(E') \Sigma_f^k(\mathbf{r}, E') \Phi(\mathbf{r}, E', \boldsymbol{\Omega}') \quad (2.31)$$

(2.28) 式と (2.31) 式を (2.27) 式に代入すると

$$S_f(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) = \int dE' \int d\boldsymbol{\Omega}' \sum_k \left( \chi_p^k(E \leftarrow E', \boldsymbol{\Omega}) \nu_p^k(E') + \sum_i \chi_{d,i}^k(E, \boldsymbol{\Omega}) \nu_{d,i}^k(E') \right) \Sigma_f^k(\mathbf{r}, E') \Phi(\mathbf{r}, E', \boldsymbol{\Omega}') \quad (2.32)$$

となる。ここで、即発核分裂中性子と遅発中性子を区別する必要がない場合、それらすべてを表すことができるように便宜的に以下のように表す。

$$S_f(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) = \int dE' \int d\boldsymbol{\Omega}' \chi(E \leftarrow E', \boldsymbol{\Omega}) \nu(E') \Sigma_f(\mathbf{r}, E') \Phi(\mathbf{r}, E', \boldsymbol{\Omega}') \quad (2.33)$$

$$\begin{aligned} \chi(E \leftarrow E', \boldsymbol{\Omega}) \nu(E') \Sigma_f(\mathbf{r}, E') = \\ \sum_k \left( \chi_p^k(E \leftarrow E', \boldsymbol{\Omega}) \nu_p^k(E') + \sum_i \chi_{d,i}^k(E, \boldsymbol{\Omega}) \nu_{d,i}^k(E') \right) \Sigma_f^k(\mathbf{r}, E') \end{aligned} \quad (2.34)$$

定常状態における散乱源は、(2.3) 式より

$$S_s(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) = \int dE' \int d\boldsymbol{\Omega}' \Sigma_s(\mathbf{r}, E \leftarrow E', \boldsymbol{\Omega} \leftarrow \boldsymbol{\Omega}') \Phi(\mathbf{r}, E', \boldsymbol{\Omega}') \quad (2.35)$$

となり、定常状態における中性子放出密度は、(2.11) 式より

$$q(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) = S_s(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) + S(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) \quad (2.36)$$

となる。定常状態における積分型輸送方程式は、(2.24) 式より

$$\Phi(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) = \int_0^\infty ds q(\mathbf{r} - s\boldsymbol{\Omega}, E, \boldsymbol{\Omega}) \exp\left(-\int_0^s \Sigma_t(\mathbf{r} - s'\boldsymbol{\Omega}, E) ds'\right) \quad (2.37)$$

となる。

## 2.2 衝突密度方程式と放出密度方程式

中性子輸送モンテカルロ法では、中性子が原子核と衝突して起こす事象をシミュレーションするので、衝突密度を基にして考える。衝突密度は次式で表される。

$$\psi(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) \equiv \Sigma_t(\mathbf{r}, E) \Phi(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) \quad (2.38)$$

この式に (2.37) 式の角度中性子束を代入すると

$$\psi(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) = \Sigma_t(\mathbf{r}, E) \int_0^\infty ds \exp\left(-\int_0^s \Sigma_t(\mathbf{r} - s'\boldsymbol{\Omega}, E) ds'\right) q(\mathbf{r} - s\boldsymbol{\Omega}, E, \boldsymbol{\Omega}) \quad (2.39)$$

となる。この式をカーネル形式 (kernel form) で表すために、まず 3 次元形式に変形する。

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) &= \Sigma_t(\mathbf{r}, E) \int d\boldsymbol{\Omega}'' \int_0^\infty s^2 ds \frac{\delta(\boldsymbol{\Omega}'' - \boldsymbol{\Omega})}{s^2} \exp\left(-\int_0^s \Sigma_t(\mathbf{r} - s'\boldsymbol{\Omega}'', E) ds'\right) \\ &\quad \times q(\mathbf{r} - s\boldsymbol{\Omega}'', E, \boldsymbol{\Omega}) \end{aligned} \quad (2.40)$$

(2.40) 式中の  $\delta$  は Dirac のデルタ関数であり、以下のような性質がある。

$$\int d\boldsymbol{\Omega}'' \delta(\boldsymbol{\Omega}'' - \boldsymbol{\Omega}) f(\boldsymbol{\Omega}'') = f(\boldsymbol{\Omega}) \quad (2.41)$$

$$\delta(\boldsymbol{\Omega}'' - \boldsymbol{\Omega}) = 0 \quad \text{for } \boldsymbol{\Omega}'' \neq \boldsymbol{\Omega} \quad (2.42)$$

ここで、 $f$  は  $\boldsymbol{\Omega}''$  を変数とする任意の関数である。(2.40) 式において

$$\mathbf{r}'' = \mathbf{r} - s\boldsymbol{\Omega}'' \quad (2.43)$$

とおくと、極座標での位置  $\mathbf{r}''$  における微少体積要素は

$$d\mathbf{r}'' = s^2 ds d\boldsymbol{\Omega}'' \quad (2.44)$$

であるから、

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) &= \int d\mathbf{r}'' \Sigma_t(\mathbf{r}, E) \exp\left(-\int_0^s \Sigma_t(\mathbf{r} - s'\boldsymbol{\Omega}'') ds'\right) \frac{\delta(\boldsymbol{\Omega}'' - \boldsymbol{\Omega})}{s^2} \\ &\quad \times q(\mathbf{r}'', E, \boldsymbol{\Omega}) \end{aligned} \quad (2.45)$$

となる。また、

$$\boldsymbol{\Omega}'' = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}''}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}''|} \quad (2.46)$$

$$s = |\mathbf{r} - \mathbf{r}''| \quad (2.47)$$

であることを用いると

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) &= \int d\mathbf{r}'' \Sigma_t(\mathbf{r}, E) \exp \left( - \int_0^{|\mathbf{r}-\mathbf{r}''|} \Sigma_t(\mathbf{r} - s' \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}''}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}''|}) ds' \right) \\ &\quad \times \frac{\delta(\boldsymbol{\Omega} \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}''}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}''|} - 1)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}''|^2} q(\mathbf{r}'', E, \boldsymbol{\Omega}) \end{aligned} \quad (2.48)$$

と表せる。 $\mathbf{r}'' \rightarrow \mathbf{r}'$ ,  $s' \rightarrow s$  と置き換えると、(2.48) 式は以下のように表される。

$$\psi(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) = \int d\mathbf{r}' T(\mathbf{r} \leftarrow \mathbf{r}', E, \boldsymbol{\Omega}) q(\mathbf{r}', E, \boldsymbol{\Omega}) \quad (2.49)$$

$$\begin{aligned} T(\mathbf{r} \leftarrow \mathbf{r}', E, \boldsymbol{\Omega}) &= \Sigma_t(\mathbf{r}, E) \exp \left( - \int_0^{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \Sigma_t(\mathbf{r} - s \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}) ds \right) \\ &\quad \times \frac{\delta(\boldsymbol{\Omega} \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - 1)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \end{aligned} \quad (2.50)$$

$T$  は、中性子の位置  $\mathbf{r}'$  から  $\mathbf{r}$  への移動を表しており、輸送カーネル (transport kernel) と呼ばれる。

(2.49) 式の右辺も衝突密度で表すように変形する。放出密度  $q$  の定義式である (2.36) 式に (2.26) 式を代入すると

$$q(\mathbf{r}', E, \boldsymbol{\Omega}) = S_s(\mathbf{r}', E, \boldsymbol{\Omega}) + S_f(\mathbf{r}', E, \boldsymbol{\Omega}) + S_e(\mathbf{r}', E, \boldsymbol{\Omega}) \quad (2.51)$$

となる。(2.35) 式の散乱源  $S_s$  を衝突密度で表すと次のようになる。

$$S_s(\mathbf{r}', E, \boldsymbol{\Omega}) = \int dE' \int d\boldsymbol{\Omega}' \frac{\Sigma_s(\mathbf{r}', E \leftarrow E', \boldsymbol{\Omega} \leftarrow \boldsymbol{\Omega}')}{\Sigma_t(\mathbf{r}', E')} \psi(\mathbf{r}', E', \boldsymbol{\Omega}') \quad (2.52)$$

散乱を起こす衝突カーネル (collision kernel) を次のように定義すると

$$C_s(\mathbf{r}', E \leftarrow E', \boldsymbol{\Omega} \leftarrow \boldsymbol{\Omega}') \equiv \frac{\Sigma_s(\mathbf{r}', E \leftarrow E', \boldsymbol{\Omega} \leftarrow \boldsymbol{\Omega}')}{\Sigma_t(\mathbf{r}', E')} \quad (2.53)$$

散乱源は

$$S_s(\mathbf{r}', E, \boldsymbol{\Omega}) = \int dE' \int d\boldsymbol{\Omega}' C_s(\mathbf{r}', E \leftarrow E', \boldsymbol{\Omega} \leftarrow \boldsymbol{\Omega}') \psi(\mathbf{r}', E', \boldsymbol{\Omega}') \quad (2.54)$$

と表せる。また、(2.33) 式の核分裂源は

$$S_f(\mathbf{r}', E, \boldsymbol{\Omega}) = \int dE' \int d\boldsymbol{\Omega}' \frac{\chi(E \leftarrow E', \boldsymbol{\Omega}) \nu(E') \Sigma_f(\mathbf{r}', E')}{\Sigma_t(\mathbf{r}', E')} \psi(\mathbf{r}', E', \boldsymbol{\Omega}') \quad (2.55)$$



となり、核分裂を引き起こす衝突カーネルを

$$C_f(\mathbf{r}', E \leftarrow E', \boldsymbol{\Omega}) = \frac{\chi(E \leftarrow E', \boldsymbol{\Omega}) \nu(E') \Sigma_f(\mathbf{r}', E')}{\Sigma_t(\mathbf{r}', E')} \quad (2.56)$$

と定義すると、核分裂源は

$$S_f(\mathbf{r}', E, \boldsymbol{\Omega}) = \int dE' \int d\boldsymbol{\Omega}' C_f(\mathbf{r}', E \leftarrow E', \boldsymbol{\Omega}) \psi(\mathbf{r}', E', \boldsymbol{\Omega}') \quad (2.57)$$

となる。(2.54) 式と (2.57) 式を (2.51) 式に代入すると、放出密度は

$$\begin{aligned} q(\mathbf{r}', E, \boldsymbol{\Omega}) &= \int dE' \int d\boldsymbol{\Omega}' C_s(\mathbf{r}', E \leftarrow E', \boldsymbol{\Omega} \leftarrow \boldsymbol{\Omega}') \psi(\mathbf{r}', E', \boldsymbol{\Omega}') \\ &\quad + \int dE' \int d\boldsymbol{\Omega}' C_f(\mathbf{r}', E \leftarrow E', \boldsymbol{\Omega}) \psi(\mathbf{r}', E', \boldsymbol{\Omega}') \\ &\quad + S_e(\mathbf{r}', E, \boldsymbol{\Omega}) \end{aligned} \quad (2.58)$$

となる。更に  $C_s$  と  $C_f$  をまとめて

$$C(\mathbf{r}', E \leftarrow E', \boldsymbol{\Omega} \leftarrow \boldsymbol{\Omega}') = C_s(\mathbf{r}', E \leftarrow E', \boldsymbol{\Omega} \leftarrow \boldsymbol{\Omega}') + C_f(\mathbf{r}', E \leftarrow E', \boldsymbol{\Omega}) \quad (2.59)$$

と定義すれば、(2.58) 式は

$$\begin{aligned} q(\mathbf{r}', E, \boldsymbol{\Omega}) &= \int dE' \int d\boldsymbol{\Omega}' C(\mathbf{r}', E \leftarrow E', \boldsymbol{\Omega} \leftarrow \boldsymbol{\Omega}') \psi(\mathbf{r}', E', \boldsymbol{\Omega}') \\ &\quad + S_e(\mathbf{r}', E, \boldsymbol{\Omega}) \end{aligned} \quad (2.60)$$

となる。ここでは、外部源が存在するとして、核分裂源を散乱源と同様に取り扱っている。外部源が存在しない場合は、核分裂は吸収として取り扱い、核分裂中性子は発生させないが、それについては後ほど取り上げる。

(2.60) 式を (2.49) 式にすると、以下のようになり、衝突密度についての式が導出できる。

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) &= \int d\mathbf{r}' \int dE' \int d\boldsymbol{\Omega}' T(\mathbf{r} \leftarrow \mathbf{r}', E, \boldsymbol{\Omega}) C(\mathbf{r}', E \leftarrow E', \boldsymbol{\Omega} \leftarrow \boldsymbol{\Omega}') \psi(\mathbf{r}', E', \boldsymbol{\Omega}') \\ &\quad + \int d\mathbf{r}' T(\mathbf{r} \leftarrow \mathbf{r}', E, \boldsymbol{\Omega}) S_e(\mathbf{r}', E, \boldsymbol{\Omega}) \end{aligned} \quad (2.61)$$

粒子が位相空間  $(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega})$  で初めて衝突する源 (first-collision source, または first-flight collision density) を

$$S_e(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) = \int d\mathbf{r}' T(\mathbf{r} \leftarrow \mathbf{r}', E, \boldsymbol{\Omega}) S_e(\mathbf{r}', E, \boldsymbol{\Omega}) \quad (2.62)$$

で定義し、遷移カーネル (transition kernel) を

$$K(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega} \leftarrow \mathbf{r}', E', \boldsymbol{\Omega}') = T(\mathbf{r} \leftarrow \mathbf{r}', E, \boldsymbol{\Omega}) C(\mathbf{r}', E \leftarrow E', \boldsymbol{\Omega} \leftarrow \boldsymbol{\Omega}') \quad (2.63)$$

と定義すると、(2.61) 式は

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) &= \int d\mathbf{r}' \int dE' \int d\boldsymbol{\Omega}' K(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega} \leftarrow \mathbf{r}', E', \boldsymbol{\Omega}') \psi(\mathbf{r}', E', \boldsymbol{\Omega}') \\ &\quad + S_e(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) \end{aligned} \quad (2.64)$$

となる。更に簡単のため、6次元位相空間  $(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega})$  を  $P$  で表すことにすると、(2.64) 式は

$$\psi(P) = \int dP' K(P \leftarrow P') \psi(P') + S_e(P) \quad (2.65)$$

となり、これが衝突密度方程式である。

ほとんどの教科書では、(2.65) 式の衝突密度方程式を基にモンテカルロシミュレーションの定式化が行われているが、別の形式で衝突密度を定義することもできる。それは放出密度  $q$  についての式を導くことによって得られる。(2.60) 式より、放出密度は

$$q(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) = \int dE' \int d\boldsymbol{\Omega}' C(\mathbf{r}, E \leftarrow E', \boldsymbol{\Omega} \leftarrow \boldsymbol{\Omega}') \psi(\mathbf{r}, E', \boldsymbol{\Omega}') + S_e(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) \quad (2.66)$$

である。この式に (2.49) 式を代入すると

$$q(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) = \int d\mathbf{r}' \int dE' \int d\boldsymbol{\Omega}' C(\mathbf{r}, E \leftarrow E', \boldsymbol{\Omega} \leftarrow \boldsymbol{\Omega}') T(\mathbf{r} \leftarrow \mathbf{r}', E', \boldsymbol{\Omega}') q(\mathbf{r}', E', \boldsymbol{\Omega}') + S_e(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) \quad (2.67)$$

となる。放出密度方程式に対する遷移カーネル  $\mathcal{K}$  を

$$\mathcal{K}(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega} \leftarrow \mathbf{r}', E', \boldsymbol{\Omega}') = C(\mathbf{r}, E \leftarrow E', \boldsymbol{\Omega} \leftarrow \boldsymbol{\Omega}') T(\mathbf{r} \leftarrow \mathbf{r}', E', \boldsymbol{\Omega}') \quad (2.68)$$

と定義すると、(2.67) 式は

$$q(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) = \int d\mathbf{r}' \int dE' \int d\boldsymbol{\Omega}' \mathcal{K}(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega} \leftarrow \mathbf{r}', E', \boldsymbol{\Omega}') q(\mathbf{r}', E', \boldsymbol{\Omega}') + S_e(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) \quad (2.69)$$

となり、6次元位相空間  $P$  で表すと

$$q(P) = \int dP' \mathcal{K}(P \leftarrow P') q(P') + S_e(P) \quad (2.70)$$

となる。これが放出密度方程式である。Lux と Koblinger は、(2.70) 式を”outcoming collision density equation” と呼んでいる [26, p.99]。また彼らは、(2.65) 式の衝突密度方程式を”ingoing collision density equation” と呼び [26, p.100]、区別している。

## 2.3 ノイマン級数解

本節では、前節で導出された衝突密度方程式と放出密度方程式に対するノイマン級数解を導く。衝突密度に対して解くべき式は、(2.65) 式である。この式を逐次解法によって解くため、以下のような漸化式を考える。

$$\begin{cases} \psi^{(0)}(P) = S_e(P) \\ \psi^{(i)}(P) = S_e(P) + \int dP' K(P \leftarrow P') \psi^{(i-1)}(P') \end{cases} \quad (2.71)$$



(2.71) 式から、 $i = 1$  に対する式は

$$\psi^{(1)}(P) = \mathcal{S}_e(P) + \int dP' K(P \leftarrow P') \mathcal{S}_e(P') \quad (2.72)$$

である。 $i = 2$  に対する式は

$$\begin{aligned} \psi^{(2)}(P) &= \mathcal{S}_e(P) + \int dP' K(P \leftarrow P') \mathcal{S}_e(P') \\ &\quad + \int dP' K(P \leftarrow P') \int dP'' K(P' \leftarrow P'') \mathcal{S}_e(P'') \\ &= \mathcal{S}_e(P) + \int dP' K(P \leftarrow P') \mathcal{S}_e(P') \\ &\quad + \int dP' \int dP_1 K(P \leftarrow P_1) K(P_1 \leftarrow P') \mathcal{S}_e(P') \end{aligned} \quad (2.73)$$

となる。これを順次繰り返すと、 $i = i$  に対する式は

$$\begin{aligned} \psi^{(i)}(P) &= \mathcal{S}_e(P) \\ &\quad + \int dP' K(P \leftarrow P') \mathcal{S}_e(P') \\ &\quad + \int dP' \int dP_1 K(P \leftarrow P_1) K(P_1 \leftarrow P') \mathcal{S}_e(P') \\ &\quad + \cdots \\ &\quad + \int dP' \int dP_1 \cdots \int dP_{i-1} K(P \leftarrow P_{i-1}) K(P_{i-1} \leftarrow P_{i-2}) \\ &\quad \cdots K(P_1 \leftarrow P') \mathcal{S}_e(P') \\ &= \mathcal{S}_e(P) + \int dP' K_1(P \leftarrow P') \mathcal{S}_e(P') + \int dP' K_2(P \leftarrow P') \mathcal{S}_e(P') \\ &\quad + \cdots + \int dP' K_i(P \leftarrow P') \mathcal{S}_e(P') \\ &= \sum_{m=0}^i \int dP' K_m(P \leftarrow P') \mathcal{S}_e(P') \end{aligned} \quad (2.74)$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned} K_0(P \leftarrow P') &= \delta(P - P') \\ K_1(P \leftarrow P') &= K(P \leftarrow P') \\ K_2(P \leftarrow P') &= \int dP_1 K(P \leftarrow P_1) K(P_1 \leftarrow P') \\ &\vdots \\ K_i(P \leftarrow P') &= \int dP_1 \cdots \int dP_{i-1} K(P \leftarrow P_{i-1}) K(P_{i-1} \leftarrow P_{i-2}) \cdots K(P_1 \leftarrow P') \end{aligned} \quad (2.75)$$

とした。(2.74) 式を用いると、(2.65) 式の解は

$$\begin{aligned} \psi(P) &= \sum_{m=0}^{\infty} \int dP' K_m(P \leftarrow P') \mathcal{S}_e(P') \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \psi_m(P) \end{aligned} \quad (2.76)$$

と表すことができる。ここで、

$$\psi_m(P) = \int dP' K_m(P \leftarrow P') \mathcal{S}_e(P') \quad (2.77)$$

である。この解はノイマン級数 (Neumann series) 解と呼ばれる。

同様に、放出密度方程式の解も求めることができる。放出密度について解くべき式は、(2.70) 式であり、これに対するノイマン級数解は

$$q(P) = \sum_{m=0}^{\infty} \int dP' \mathcal{K}_m(P \leftarrow P') \mathcal{S}_e(P') \quad (2.78)$$

となる。

## 2.4 散乱カーネル

(2.53) 式で散乱を引き起こす衝突カーネル (散乱カーネル) を定義したが、モンテカルロ法では散乱タイプや散乱後の粒子のエネルギーや飛行方向を確率分布に従ってサンプリングによって決定するので、サンプリング過程を理解するためにもう少し詳しく書き下しておく。吸収以外の反応はすべて非吸収反応、即ち散乱反応と考えることができ、散乱断面積を (n,2n) 反応等も含めて以下のように定義する。

$$\Sigma_t = \Sigma_a + \Sigma_s \quad (2.79)$$

$$\Sigma_s = \Sigma_e + \Sigma_{ie} + \Sigma_{2n} + \Sigma_{3n} + \cdots \quad (2.80)$$

すると、散乱カーネルは

$$C_s(\mathbf{r}, E \leftarrow E', \boldsymbol{\Omega} \leftarrow \boldsymbol{\Omega}') = \sum_x C_x(\mathbf{r}, E \leftarrow E', \boldsymbol{\Omega} \leftarrow \boldsymbol{\Omega}') \quad (2.81)$$

$$= \sum_x \frac{\nu_x \Sigma_x(\mathbf{r}, E \leftarrow E', \boldsymbol{\Omega} \leftarrow \boldsymbol{\Omega}')}{\Sigma_t(\mathbf{r}, E')} \quad (2.82)$$

となる。ここで、 $x$  は弾性散乱、非弾性散乱、(n,2n)、(n,3n) 反応等を表すインデックスであり、 $\nu_x$  は、反応  $x$  による中性子の増倍 (multiplicity) を表す。通常、マクロ断面積は、いくつかの核種から構成されているので、

$$C_s(\mathbf{r}, E \leftarrow E', \boldsymbol{\Omega} \leftarrow \boldsymbol{\Omega}') = \frac{1}{\Sigma_t(\mathbf{r}, E')} \sum_k \sum_x \nu_x^k \Sigma_x^k(\mathbf{r}, E \leftarrow E', \boldsymbol{\Omega} \leftarrow \boldsymbol{\Omega}') \quad (2.83)$$

$$= \sum_k \frac{\Sigma_t^k(\mathbf{r}, E')}{\Sigma_t(\mathbf{r}, E')} \sum_x \frac{\nu_x^k \Sigma_x^k(\mathbf{r}, E \leftarrow E', \boldsymbol{\Omega} \leftarrow \boldsymbol{\Omega}')}{\Sigma_t^k(\mathbf{r}, E')} \quad (2.84)$$

$$= \sum_k \frac{\Sigma_t^k(\mathbf{r}, E')}{\Sigma_t(\mathbf{r}, E')} \sum_x \frac{\nu_x^k \sigma_x^k(E \leftarrow E', \boldsymbol{\Omega} \leftarrow \boldsymbol{\Omega}')}{\sigma_t^k(E')} \quad (2.85)$$

と表すことができる。ここで、 $k$  は核種を表すインデックスである。更に、散乱後の粒子のエネルギー、飛行方向は、散乱の運動学 (kinematics) や評価済み核データに定義されている

散乱モデルによって決定されるので、(2.85) 式に現れる  $\sigma_x^k(\mathbf{r}, E \leftarrow E', \boldsymbol{\Omega} \leftarrow \boldsymbol{\Omega}')$  は、次のように記述しておくとも便利である。

$$\sigma_x^k(E \leftarrow E', \boldsymbol{\Omega} \leftarrow \boldsymbol{\Omega}') = \sigma_x^k(E') f_x^k(E \leftarrow E', \boldsymbol{\Omega} \leftarrow \boldsymbol{\Omega}') \quad (2.86)$$

ここで、

$$\sigma_x^k(E') \equiv \int dE \int d\boldsymbol{\Omega} \sigma_x^k(E \leftarrow E', \boldsymbol{\Omega} \leftarrow \boldsymbol{\Omega}') \quad (2.87)$$

と定義され、 $f_x^k$  は以下のように規格化されているものとする。

$$\int dE \int d\boldsymbol{\Omega} f_x^k(E \leftarrow E', \boldsymbol{\Omega} \leftarrow \boldsymbol{\Omega}') = 1 \quad (2.88)$$

$\sigma_x^k(E')$  は、中性子が核種  $k$  の原子核と衝突し、反応  $x$  を引き起こす断面積であり、評価済み核データのファイル 3<sup>†</sup> に定義されている。また、 $f_x^k$  は、中性子が核種  $k$  の原子核と衝突し、反応  $x$  を引き起こしたときのエネルギー・角度分布を表しており、評価済み核データのファイル 4 からファイル 6 に定義されている。

(2.86) 式を (2.85) 式に代入すると、散乱カーネルは

$$\begin{aligned} C_s(\mathbf{r}, E \leftarrow E', \boldsymbol{\Omega} \leftarrow \boldsymbol{\Omega}') &= \sum_k \frac{\Sigma_t^k(\mathbf{r}, E')}{\Sigma_t(\mathbf{r}, E')} \sum_x \frac{\sigma_x^k(E')}{\sigma_t^k(E')} \nu_x^k f_x^k(E \leftarrow E', \boldsymbol{\Omega} \leftarrow \boldsymbol{\Omega}') \end{aligned} \quad (2.89)$$

$$= \sum_k \frac{\Sigma_t^k(\mathbf{r}, E')}{\Sigma_t(\mathbf{r}, E')} \frac{\sigma_s^k(E')}{\sigma_t^k(E')} \sum_x \frac{\sigma_x^k(E')}{\sigma_s^k(E')} \nu_x^k f_x^k(E \leftarrow E', \boldsymbol{\Omega} \leftarrow \boldsymbol{\Omega}') \quad (2.90)$$

となる。この式において  $\Sigma_t^k(\mathbf{r}, E')/\Sigma_t(\mathbf{r}, E')$  は衝突核種の決定、 $\sigma_s^k(E')/\sigma_t^k(E')$  は吸収されずに散乱される確率、 $\sigma_x^k(E')/\sigma_s^k(E')$  は散乱タイプの決定、 $\nu_x^k f_x^k$  は散乱後の粒子の発生数、エネルギー、角度分布の決定を表している。

## 2.5 固有値問題

本節では、増倍系で外部源がないとき、即ち、外部源がなく、核分裂源のみがあるときの基礎式について考察する。このとき、衝突密度方程式または放出密度方程式は同次方程式となり、固有値問題として解かれる。固有値問題を議論するときは、放出密度方程式を基礎とする方が物理的にも分かりやすいので、まずは放出密度方程式について考察し、その後、衝突密度方程式について考える。

### 2.5.1 放出密度方程式に対する固有値問題

(2.67) 式において、外部源  $S_e(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) = 0$  とすると

$$q(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) = \int d\mathbf{r}' \int dE' \int d\boldsymbol{\Omega}' C(\mathbf{r}, E \leftarrow E', \boldsymbol{\Omega} \leftarrow \boldsymbol{\Omega}') T(\mathbf{r} \leftarrow \mathbf{r}', E', \boldsymbol{\Omega}') q(\mathbf{r}', E', \boldsymbol{\Omega}') \quad (2.91)$$

<sup>†</sup> ENDF フォーマットの MF=3 で指定されるセクション



となる。(2.59) 式の定義を用いて、衝突カーネルを散乱カーネルと核分裂を引き起こす衝突カーネル(核分裂カーネル)に分割すると、

$$q(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) = \int d\mathbf{r}' \int dE' \int d\boldsymbol{\Omega}' C_s(\mathbf{r}, E \leftarrow E', \boldsymbol{\Omega} \leftarrow \boldsymbol{\Omega}') T(\mathbf{r} \leftarrow \mathbf{r}', E', \boldsymbol{\Omega}') q(\mathbf{r}', E', \boldsymbol{\Omega}') \\ + \int d\mathbf{r}' \int dE' \int d\boldsymbol{\Omega}' C_f(\mathbf{r}, E \leftarrow E', \boldsymbol{\Omega}) T(\mathbf{r} \leftarrow \mathbf{r}', E', \boldsymbol{\Omega}') q(\mathbf{r}', E', \boldsymbol{\Omega}') \quad (2.92)$$

となる。簡単のため、

$$\mathcal{K}_s(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega} \leftarrow \mathbf{r}', E', \boldsymbol{\Omega}') \equiv C_s(\mathbf{r}, E \leftarrow E', \boldsymbol{\Omega} \leftarrow \boldsymbol{\Omega}') T(\mathbf{r} \leftarrow \mathbf{r}', E', \boldsymbol{\Omega}') \quad (2.93)$$

$$\mathcal{K}_f(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega} \leftarrow \mathbf{r}', E', \boldsymbol{\Omega}') \equiv C_f(\mathbf{r}, E \leftarrow E', \boldsymbol{\Omega}) T(\mathbf{r} \leftarrow \mathbf{r}', E', \boldsymbol{\Omega}') \quad (2.94)$$

と定義すると、(2.92) 式は次のようになる。

$$q(P) = \int dP' \mathcal{K}_s(P \leftarrow P') q(P') + \int dP' \mathcal{K}_f(P \leftarrow P') q(P') \quad (2.95)$$

ここで、 $P = (\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega})$  を用いた。この式を見れば明らかのように、(2.95) 式の自明解は  $q(P) = 0$  である。しかし、実際の体系では  $q(P) \neq 0$  の解を求める必要があり、固有値問題として (2.95) 式を解く。

(2.95) 式を源反復法によって解くため、世代の概念を導入し、核分裂源を各世代の中性子源とする。(2.95) 式の右辺第 2 項は核分裂源であり、(2.57) 式に (2.49) 式を代入すると

$$S_f(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) = \int dE' \int d\boldsymbol{\Omega}' C_f(\mathbf{r}, E \leftarrow E', \boldsymbol{\Omega}) \int d\mathbf{r}' T(\mathbf{r} \leftarrow \mathbf{r}', E', \boldsymbol{\Omega}') q(\mathbf{r}', E', \boldsymbol{\Omega}') \quad (2.96)$$

$$S_f(P) = \int dP' \mathcal{K}_f(P \leftarrow P') q(P') \quad (2.97)$$

となり、(2.95) 式は

$$q(P) = \int dP' \mathcal{K}_s(P \leftarrow P') q(P') + S_f(P) \quad (2.98)$$

と表すことができる。(2.98) 式に対して世代の概念を導入し、第  $j$  世代の核分裂源  $S_{f,j}(P)$  が既知であるとして第  $j$  世代における放出密度を次式によって求める。

$$q_j(P) = \int dP' \mathcal{K}_s(P \leftarrow P') q_j(P') + S_{f,j}(P) \quad (2.99)$$

この式から得られた放出密度から、次の世代である第  $j+1$  世代の核分裂源を

$$S_{f,j+1}(P) = \frac{1}{k_j} \int dP' \mathcal{K}_f(P \leftarrow P') q_j(P') \quad (2.100)$$

で求める。ここで、 $k_j$  は第  $j$  世代の増倍率であり、次式で定義される。

$$k_j S_{f,j}(P) = \int dP' \mathcal{K}_f(P \leftarrow P') q_j(P') \quad (2.101)$$

左辺の  $S_{f,j}(P)$  は第  $j$  世代の初期核分裂源分布、右辺は第  $j$  世代で発生した核分裂中性子の分布を表している。(2.99) 式と (2.100) 式を用いて、核分裂源分布が収束するまで世代について反復する。これは決定論的手法の外部反復 (源反復) に相当し、(2.100) 式は核分裂源分布を規格化することを表している。即ち、(2.101) 式の両辺を全位相空間で積分すると

$$k_j = \frac{\int dP \int dP' \mathcal{K}_f(P \leftarrow P') q_j(P')}{\int dP S_{f,j}(P)} \quad (2.102)$$

であり、(2.100) 式の両辺を全位相空間で積分すると

$$\int dP S_{f,j+1}(P) = \frac{1}{k_j} \int dP \int dP' \mathcal{K}_f(P \leftarrow P') q_j(P') \quad (2.103)$$

となることから、

$$\int dP S_{f,j+1}(P) = \int dP S_{f,j}(P) \quad (2.104)$$

である。各世代において発生する核分裂中性子数は等しくなるように規格化されている。(非アナログモンテカルロ法では、核分裂中性子の総重みが保存されている。)

増倍率の定義である (2.102) 式を更に変形するため、(2.99) 式のノイマン級数解を考える。2.3 節で放出密度方程式に対するノイマン級数解を導出したのと同様に、(2.99) 式に対するノイマン級数解は次のようになる。

$$q_j(P) = \sum_{m=0}^{\infty} \int dP' \mathcal{K}_{s,m}(P \leftarrow P') S_{f,j}(P') \quad (2.105)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{s,0}(P \leftarrow P') &= \delta(P - P'), \\ \mathcal{K}_{s,1}(P \leftarrow P') &= \mathcal{K}_s(P \leftarrow P'), \\ \mathcal{K}_{s,m}(P \leftarrow P') &= \int dP_1 \cdots \int dP_{m-1} \mathcal{K}_s(P \leftarrow P_{m-1}) \mathcal{K}_s(P_{m-1} \leftarrow P_{m-2}) \\ &\quad \cdots \mathcal{K}_s(P_1 \leftarrow P'), \end{aligned} \quad (2.106)$$

$$\mathcal{K}_s(P \leftarrow P') = C_s(\mathbf{r}, E \leftarrow E', \boldsymbol{\Omega} \leftarrow \boldsymbol{\Omega}') T(\mathbf{r} \leftarrow \mathbf{r}', E', \boldsymbol{\Omega}') \quad (2.107)$$

である。(2.105) 式を (2.102) 式に代入すると

$$k_j = \frac{\int dP \int dP'' \mathcal{K}_f(P \leftarrow P'') \sum_{m=0}^{\infty} \int dP' \mathcal{K}_{s,m}(P'' \leftarrow P') S_{f,j}(P')}{\int dP S_{f,j}(P)} \quad (2.108)$$

$$= \frac{\int dP \int dP' \mathcal{K}_F(P \leftarrow P') S_{f,j}(P')}{\int dP S_{f,j}(P)} \quad (2.109)$$

となる。ここで、

$$\mathcal{K}_F(P \leftarrow P') \equiv \int dP'' \mathcal{K}_f(P \leftarrow P'') \sum_{m=0}^{\infty} \mathcal{K}_{s,m}(P'' \leftarrow P') \quad (2.110)$$

と定義した。(2.109) 式の物理的意味は明白である。分母は核分裂によって発生する総中性子数、分子は源として発生した核分裂中性子が散乱を繰り返し、再び核分裂を引き起こして発生する総中性子数を表しており、核分裂中性子数の生成比で定義される増倍率を表している。固有値問題に対するモンテカルロ計算では、(2.109) 式で各世代の増倍率を計算し、核分裂中性子源が収束した後の増倍率を算術平均することにより、実効増倍率  $k_{\text{eff}}$  (最大固有値) を求める。

### 2.5.2 衝突密度方程式に対する固有値問題

放出密度と同様に衝突密度についても固有値方程式を導くことができる。外部源がないときの衝突密度方程式は (2.61) 式より

$$\psi(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) = \int d\mathbf{r}' \int dE' \int d\boldsymbol{\Omega}' T(\mathbf{r} \leftarrow \mathbf{r}', E, \boldsymbol{\Omega}) C(\mathbf{r}', E \leftarrow E', \boldsymbol{\Omega} \leftarrow \boldsymbol{\Omega}') \psi(\mathbf{r}', E', \boldsymbol{\Omega}') \quad (2.111)$$

である。(2.59) 式の定義を用いて、衝突カーネルを散乱カーネルと核分裂カーネルに分割すると

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) &= \int d\mathbf{r}' \int dE' \int d\boldsymbol{\Omega}' T(\mathbf{r} \leftarrow \mathbf{r}', E, \boldsymbol{\Omega}) C_s(\mathbf{r}', E \leftarrow E', \boldsymbol{\Omega} \leftarrow \boldsymbol{\Omega}') \psi(\mathbf{r}', E', \boldsymbol{\Omega}') \\ &\quad + \int d\mathbf{r}' \int dE' \int d\boldsymbol{\Omega}' T(\mathbf{r} \leftarrow \mathbf{r}', E, \boldsymbol{\Omega}) C_f(\mathbf{r}', E \leftarrow E', \boldsymbol{\Omega}) \psi(\mathbf{r}', E', \boldsymbol{\Omega}') \end{aligned} \quad (2.112)$$

であり、簡単のため

$$K_s(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega} \leftarrow \mathbf{r}', E', \boldsymbol{\Omega}') \equiv T(\mathbf{r} \leftarrow \mathbf{r}', E, \boldsymbol{\Omega}) C_s(\mathbf{r}', E \leftarrow E', \boldsymbol{\Omega} \leftarrow \boldsymbol{\Omega}') \quad (2.113)$$

$$K_f(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega} \leftarrow \mathbf{r}', E', \boldsymbol{\Omega}') \equiv T(\mathbf{r} \leftarrow \mathbf{r}', E, \boldsymbol{\Omega}) C_f(\mathbf{r}', E \leftarrow E', \boldsymbol{\Omega}) \quad (2.114)$$

と定義すると、(2.112) 式は

$$\psi(P) = \int dP' K_s(P \leftarrow P') \psi(P') + \int dP' K_f(P \leftarrow P') \psi(P') \quad (2.115)$$

となる。ここで、 $P = (\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega})$  を用いた。この式の自明解は  $\psi(P) = 0$  で、自明解以外の解を求めるため、(2.115) 式を固有値方程式に変形する。(2.57) 式を用いると、

$$\mathcal{S}_f(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) \equiv \int d\mathbf{r}' T(\mathbf{r} \leftarrow \mathbf{r}', E, \boldsymbol{\Omega}) \mathcal{S}_f(\mathbf{r}', E, \boldsymbol{\Omega}) \quad (2.116)$$

$$\begin{aligned} &= \int d\mathbf{r}' \int dE' \int d\boldsymbol{\Omega}' T(\mathbf{r} \leftarrow \mathbf{r}', E, \boldsymbol{\Omega}) C_f(\mathbf{r}', E \leftarrow E', \boldsymbol{\Omega}) \psi(\mathbf{r}', E', \boldsymbol{\Omega}') \\ &= \int d\mathbf{r}' \int dE' \int d\boldsymbol{\Omega}' K_f(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega} \leftarrow \mathbf{r}', E', \boldsymbol{\Omega}') \psi(\mathbf{r}', E', \boldsymbol{\Omega}') \end{aligned} \quad (2.117)$$



であるから、(2.115) 式は

$$\psi(P) = \int dP' K_s(P \leftarrow P') \psi(P') + \mathcal{S}_f(P) \quad (2.118)$$

となる。前節と同様に、この式に対して世代の概念を導入し、第  $j$  世代の核分裂源  $\mathcal{S}_{f,j}(P)$  が既知であるとして第  $j$  世代の衝突密度を次式から求める。

$$\psi_j(P) = \int dP' K_s(P \leftarrow P') \psi_j(P') + \mathcal{S}_{f,j}(P) \quad (2.119)$$

この式で得られた衝突密度から次の世代 (第  $j+1$  世代) の核分裂源を求める。それは、(2.116) 式より

$$\mathcal{S}_{f,j+1}(P) = \int d\mathbf{r}' T(\mathbf{r} \leftarrow \mathbf{r}', E, \boldsymbol{\Omega}) \mathcal{S}_{f,j+1}(\mathbf{r}', E, \boldsymbol{\Omega}) \quad (2.120)$$

であり、放出密度方程式に対する規格化の式 (2.100) 式を代入して

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{f,j+1}(P) &= \frac{1}{k_j} \int d\mathbf{r}'' T(\mathbf{r} \leftarrow \mathbf{r}'', E, \boldsymbol{\Omega}) \\ &\times \int d\mathbf{r}' \int dE' \int d\boldsymbol{\Omega}' \mathcal{K}_f(\mathbf{r}'', E, \boldsymbol{\Omega} \leftarrow \mathbf{r}', E', \boldsymbol{\Omega}') q_j(\mathbf{r}', E', \boldsymbol{\Omega}') \end{aligned} \quad (2.121)$$

となる。更に、(2.94) 式を用いて

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{f,j+1}(P) &= \frac{1}{k_j} \int d\mathbf{r}'' T(\mathbf{r} \leftarrow \mathbf{r}'', E, \boldsymbol{\Omega}) \int d\mathbf{r}' \int dE' \int d\boldsymbol{\Omega}' C_f(\mathbf{r}'', E \leftarrow E', \boldsymbol{\Omega}) \\ &\times T(\mathbf{r}'' \leftarrow \mathbf{r}', E', \boldsymbol{\Omega}') q_j(\mathbf{r}', E', \boldsymbol{\Omega}') \end{aligned} \quad (2.122)$$

(2.49) 式を用いて

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{f,j+1}(P) &= \frac{1}{k_j} \int d\mathbf{r}'' T(\mathbf{r} \leftarrow \mathbf{r}'', E, \boldsymbol{\Omega}) \int dE' \int d\boldsymbol{\Omega}' C_f(\mathbf{r}'', E \leftarrow E', \boldsymbol{\Omega}) \\ &\times \psi_j(\mathbf{r}'', E', \boldsymbol{\Omega}') \end{aligned} \quad (2.123)$$

(2.114) 式を用いて

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{f,j+1}(P) &= \frac{1}{k_j} \int d\mathbf{r}' \int dE' \int d\boldsymbol{\Omega}' K_f(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega} \leftarrow \mathbf{r}', E', \boldsymbol{\Omega}') \psi_j(\mathbf{r}', E', \boldsymbol{\Omega}') \\ &= \frac{1}{k_j} \int dP' K_f(P \leftarrow P') \psi_j(P') \end{aligned} \quad (2.124)$$

となり、この式が衝突密度についての固有値方程式に対する規格化の式となる。以上の導出から分かるように、増倍率  $k_j$  は (2.101) 式で定義されるものであり、放出密度についての固有値方程式で定義されている。しかし、(2.101) 式から衝突密度を用いた増倍率の定義も導出できる。(2.101) 式の両辺に  $\int d\mathbf{r}'' T(\mathbf{r} \leftarrow \mathbf{r}'', E, \boldsymbol{\Omega})$  を演算し、

$$\begin{aligned} k_j \int d\mathbf{r}'' T(\mathbf{r} \leftarrow \mathbf{r}'', E, \boldsymbol{\Omega}) \mathcal{S}_{f,j}(\mathbf{r}'', E, \boldsymbol{\Omega}) &= \\ \int d\mathbf{r}'' T(\mathbf{r} \leftarrow \mathbf{r}'', E, \boldsymbol{\Omega}) \int dP' K_f(P \leftarrow P') \psi_j(P') \end{aligned} \quad (2.125)$$

(2.121) 式から (2.124) 式への変形と同様に変形すると

$$k_j \mathcal{S}_{f,j}(P) = \int dP' K_f(P \leftarrow P') \psi_j(P') \quad (2.126)$$

となり、放出密度固有値方程式で定義される増倍率と衝突密度固有値方程式で定義される増倍率は、全く同じであることが分かる。また、(2.126) 式の両辺を位相空間  $P$  で積分すると

$$k_j = \frac{\int dP \int dP' K_f(P \leftarrow P') \psi_j(P')}{\int dP \mathcal{S}_{f,j}(P)} \quad (2.127)$$

が得られ、これを増倍率の定義式と考えるのも良い。

更に (2.127) 式を変形するため、(2.119) 式のノイマン級数解を考える。2.3 節において衝突密度方程式に対するノイマン級数解が (2.76) 式のように表されることから、(2.119) 式のノイマン級数解は次式で表すことができる。

$$\psi_j(P) = \sum_{m=0}^{\infty} \int dP' K_{s,m}(P \leftarrow P') \mathcal{S}_{f,j}(P') \quad (2.128)$$

ここで、 $K_{s,m}$  は、(2.75) 式と同様にして

$$K_{s,m}(P \leftarrow P') = \int dP_1 \cdots \int dP_{m-1} K_s(P \leftarrow P_{m-1}) K_s(P_{m-1} \leftarrow P_{m-2}) \cdots K_s(P_1 \leftarrow P') \quad (2.129)$$

で定義され、 $K_s$  は (2.63) 式の散乱カーネルを含む項だけで構成され、以下のように定義される。

$$K_s(P \leftarrow P') = T(\mathbf{r} \leftarrow \mathbf{r}', E, \boldsymbol{\Omega}) C_s(\mathbf{r}', E \leftarrow E', \boldsymbol{\Omega} \leftarrow \boldsymbol{\Omega}') \quad (2.130)$$

(2.128) 式を (2.127) 式に代入すると

$$k_j = \frac{\int dP \int dP'' K_f(P \leftarrow P'') \sum_{m=0}^{\infty} \int dP' K_{s,m}(P'' \leftarrow P') \mathcal{S}_{f,j}(P')}{\int dP \mathcal{S}_{f,j}(P)} \quad (2.131)$$

$$= \frac{\int dP \int dP' K_F(P \leftarrow P') \mathcal{S}_{f,j}(P')}{\int dP \mathcal{S}_{f,j}(P)} \quad (2.132)$$

となる。ここで、

$$K_F(P \leftarrow P') \equiv \int dP'' K_f(P \leftarrow P'') \sum_{m=0}^{\infty} K_{s,m}(P'' \leftarrow P') \quad (2.133)$$

とした。(2.132) 式で定義される増倍率は、(2.109) 式の増倍率と見かけは異なるが等価である。それについては次節で説明する。



## 2.6 実効増倍率の評価

### 2.6.1 中性子生成率比による実効増倍率

中性子生成率比による実効増倍率は既に前節で定義されており、(2.109) 式もしくは (2.132) 式で与えられる。本項では、これらが等価であることを示す。(2.109) 式の分子は、以下のように変形することができる。

$$\begin{aligned}
& \int dP \int dP' \mathcal{K}_F(P \leftarrow P') S_{f,j}(P') \\
&= \int dP \int dP'' \mathcal{K}_f(P \leftarrow P'') \sum_{m=0}^{\infty} \int dP' \mathcal{K}_{s,m}(P'' \leftarrow P') S_{f,j}(P') \\
&= \int dP \int dP' \mathcal{K}_f(P \leftarrow P') S_{f,j}(P') \\
&\quad + \int dP \int dP' \int dP_1 \mathcal{K}_f(P \leftarrow P_1) \mathcal{K}_s(P_1 \leftarrow P') S_{f,j}(P') \\
&\quad \vdots \\
&\quad + \int dP \int dP' \int dP_{m-1} \cdots \int dP_1 \mathcal{K}_f(P \leftarrow P_{m-1}) \mathcal{K}_s(P_{m-1} \leftarrow P_{m-2}) \\
&\quad \cdots \mathcal{K}_s(P_1 \leftarrow P') S_{f,j}(P') \\
&\quad \vdots \\
&= \int dP_1 \int dP_0 \mathcal{K}_f(P_1 \leftarrow P_0) S_{f,j}(P_0) \\
&\quad + \int dP_2 \int dP_1 \int dP_0 \mathcal{K}_f(P_2 \leftarrow P_1) \mathcal{K}_s(P_1 \leftarrow P_0) S_{f,j}(P_0) \\
&\quad \vdots \\
&\quad + \int dP_m \cdots \int dP_0 \mathcal{K}_f(P_m \leftarrow P_{m-1}) \mathcal{K}_s(P_{m-1} \leftarrow P_{m-2}) \\
&\quad \cdots \mathcal{K}_s(P_1 \leftarrow P_0) S_{f,j}(P_0) \\
&\quad \vdots
\end{aligned} \tag{2.134}$$

$\mathcal{K}_s$  の定義式 (2.93) 式と  $\mathcal{K}_f$  の定義式 (2.94) 式を用いると、(2.134) 式の第  $m$  項は

$$\begin{aligned}
& \int dP_m \cdots \int dP_0 \mathcal{K}_f(P_m \leftarrow P_{m-1}) \mathcal{K}_s(P_{m-1} \leftarrow P_{m-2}) \cdots \mathcal{K}_s(P_1 \leftarrow P_0) S_{f,j}(P_0) \\
&= \int d\mathbf{r}_m \int dE_m \int d\boldsymbol{\Omega}_m \cdots \int d\mathbf{r}_0 \int dE_0 \int d\boldsymbol{\Omega}_0 \chi(E_m \leftarrow E_{m-1}, \boldsymbol{\Omega}_m) \frac{\nu \Sigma_f(\mathbf{r}_m, E_{m-1})}{\Sigma_t(\mathbf{r}_m, E_{m-1})} \\
&\quad \times T(\mathbf{r}_m \leftarrow \mathbf{r}_{m-1}, E_{m-1}, \boldsymbol{\Omega}_{m-1}) C_s(\mathbf{r}_{m-1}, E_{m-1} \leftarrow E_{m-2}, \boldsymbol{\Omega}_{m-1} \leftarrow \boldsymbol{\Omega}_{m-2}) \\
&\quad \times T(\mathbf{r}_{m-1} \leftarrow \mathbf{r}_{m-2}, E_{m-2}, \boldsymbol{\Omega}_{m-2}) \cdots C_s(\mathbf{r}_1, E_1 \leftarrow E_0, \boldsymbol{\Omega}_1 \leftarrow \boldsymbol{\Omega}_0) T(\mathbf{r}_1 \leftarrow \mathbf{r}_0, E_0, \boldsymbol{\Omega}_0) \\
&\quad \times S_{f,j}(\mathbf{r}_0, E_0, \boldsymbol{\Omega}_0) \\
&= \int d\mathbf{r}_m \int d\mathbf{r}_{m-1} \int dE_{m-1} \int d\boldsymbol{\Omega}_{m-1} \cdots \int d\mathbf{r}_0 \int dE_0 \int d\boldsymbol{\Omega}_0 \frac{\nu \Sigma_f(\mathbf{r}_m, E_{m-1})}{\Sigma_t(\mathbf{r}_m, E_{m-1})} \\
&\quad \times T(\mathbf{r}_m \leftarrow \mathbf{r}_{m-1}, E_{m-1}, \boldsymbol{\Omega}_{m-1}) C_s(\mathbf{r}_{m-1}, E_{m-1} \leftarrow E_{m-2}, \boldsymbol{\Omega}_{m-1} \leftarrow \boldsymbol{\Omega}_{m-2}) \\
&\quad \times T(\mathbf{r}_{m-1} \leftarrow \mathbf{r}_{m-2}, E_{m-2}, \boldsymbol{\Omega}_{m-2}) \cdots C_s(\mathbf{r}_1, E_1 \leftarrow E_0, \boldsymbol{\Omega}_1 \leftarrow \boldsymbol{\Omega}_0) T(\mathbf{r}_1 \leftarrow \mathbf{r}_0, E_0, \boldsymbol{\Omega}_0) \\
&\quad \times S_{f,j}(\mathbf{r}_0, E_0, \boldsymbol{\Omega}_0)
\end{aligned} \tag{2.135}$$

となる。ここで、

$$\int dE \int d\Omega \chi(E \leftarrow E', \Omega) = 1 \quad (2.136)$$

を用いた。(2.135) 式の右辺において、 $E_{m-1}$  を  $E_m$ 、 $\Omega_{m-1}$  を  $\Omega_m$  で置き換えると

$$\begin{aligned} & \int dP_m \cdots \int dP_0 \mathcal{K}_f(P_m \leftarrow P_{m-1}) \mathcal{K}_s(P_{m-1} \leftarrow P_{m-2}) \cdots \mathcal{K}_s(P_1 \leftarrow P_0) S_{f,j}(P_0) \\ &= \int d\mathbf{r}_m \int d\mathbf{r}_{m-1} \int dE_m \int d\Omega_m \cdots \int d\mathbf{r}_0 \int dE_1 \int d\Omega_1 p_f(\mathbf{r}_m, E_m) \\ & \quad \times T(\mathbf{r}_m \leftarrow \mathbf{r}_{m-1}, E_m, \Omega_m) C_s(\mathbf{r}_{m-1}, E_m \leftarrow E_{m-1}, \Omega_m \leftarrow \Omega_{m-1}) \\ & \quad \times T(\mathbf{r}_{m-1} \leftarrow \mathbf{r}_{m-2}, E_{m-1}, \Omega_{m-1}) \cdots C_s(\mathbf{r}_1, E_2 \leftarrow E_1, \Omega_2 \leftarrow \Omega_1) \\ & \quad \times T(\mathbf{r}_1 \leftarrow \mathbf{r}_0, E_1, \Omega_1) S_{f,j}(\mathbf{r}_0, E_1, \Omega_1) \end{aligned} \quad (2.137)$$

と変形できる。ここで、簡単のため

$$p_f(\mathbf{r}, E) \equiv \frac{\nu \Sigma_f(\mathbf{r}, E)}{\Sigma_t(\mathbf{r}, E)} \quad (2.138)$$

と定義した。(2.137) 式における  $\mathbf{r}_0$  についての積分を (2.116) 式で表わし、散乱のみの遷移カーネル定義式である (2.113) 式を用いると

$$\begin{aligned} & \int dP_m \cdots \int dP_0 \mathcal{K}_f(P_m \leftarrow P_{m-1}) \mathcal{K}_s(P_{m-1} \leftarrow P_{m-2}) \cdots \mathcal{K}_s(P_1 \leftarrow P_0) S_{f,j}(P_0) \\ &= \int dP_m \cdots \int dP_1 p_f(\mathbf{r}_m, E_m) K_s(P_m \leftarrow P_{m-1}) \cdots K_s(P_2 \leftarrow P_1) S_{f,j}(P_1) \end{aligned} \quad (2.139)$$

となる。ただし、 $m=1$  のときは、

$$\int dP_1 \int dP_0 \mathcal{K}_f(P_1 \leftarrow P_0) S_{f,j}(P_0) = \int dP_1 p_f(\mathbf{r}_1, E_1) S_{f,j}(P_1) \quad (2.140)$$

である。ここで、放出密度としての核分裂源  $S_{f,j}$  が衝突密度としての核分裂源  $\mathcal{S}_{f,j}$  に変わったことに注意する。(2.139) 式の関係式を (2.134) 式に用いると

$$\begin{aligned} & \int dP \int dP' \mathcal{K}_F(P \leftarrow P') S_{f,j}(P') \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \int dP_m \cdots \int dP_1 p_f(P_m) K_s(P_m \leftarrow P_{m-1}) \cdots K_s(P_2 \leftarrow P_1) \mathcal{S}_{f,j}(P_1) \end{aligned} \quad (2.141)$$

が得られる。ここで、

$$p_f(P_m) = p_f(\mathbf{r}_m, E_m) \quad (2.142)$$

である。よって、(2.109) 式で定義された実効増倍率は

$$k_j = \frac{\sum_{m=1}^{\infty} \int dP_m \cdots \int dP_1 p_f(P_m) K_s(P_m \leftarrow P_{m-1}) \cdots K_s(P_2 \leftarrow P_1) \mathcal{S}_{f,j}(P_1)}{\int dP \mathcal{S}_{f,j}(P)} \quad (2.143)$$

のように変形できる。

次に、(2.132) 式で定義された実効増倍率の変形を考える。(2.132) 式の分子は、以下のよう変形することができる。

$$\begin{aligned}
& \int dP \int dP' K_F(P \leftarrow P') \mathcal{S}_{f,j}(P') \\
&= \int dP \int dP'' K_f(P \leftarrow P'') \sum_{m=0}^{\infty} \int dP' K_{s,m}(P'' \leftarrow P') \mathcal{S}_{f,j}(P') \\
&= \int dP \int dP' K_f(P \leftarrow P') \mathcal{S}_{f,j}(P') \\
&\quad + \int dP \int dP' \int dP_1 K_f(P \leftarrow P_1) K_s(P_1 \leftarrow P') \mathcal{S}_{f,j}(P') \\
&\quad \vdots \\
&\quad + \int dP \int dP' \int dP_{m-1} \cdots \int dP_1 K_f(P \leftarrow P_{m-1}) K_s(P_{m-1} \leftarrow P_{m-2}) \\
&\quad \cdots K_s(P_1 \leftarrow P') \mathcal{S}_{f,j}(P') \\
&\quad \vdots \\
&= \int dP_2 \int dP_1 K_f(P_2 \leftarrow P_1) \mathcal{S}_{f,j}(P_1) \\
&\quad + \int dP_3 \int dP_2 \int dP_1 K_f(P_3 \leftarrow P_2) K_s(P_2 \leftarrow P_1) \mathcal{S}_{f,j}(P_1) \\
&\quad \vdots \\
&\quad + \int dP_m \cdots \int dP_1 K_f(P_m \leftarrow P_{m-1}) K_s(P_{m-1} \leftarrow P_{m-2}) \\
&\quad \cdots K_s(P_2 \leftarrow P_1) \mathcal{S}_{f,j}(P_1) \\
&\quad \vdots
\end{aligned} \tag{2.144}$$

ここで、 $\int dP_m K_f(P_m \leftarrow P_{m-1})$  を変形するために、輸送カーネル  $T$  を行き先  $\mathbf{r}$  で積分すると

$$\begin{aligned}
& \int d\mathbf{r} T(\mathbf{r} \leftarrow \mathbf{r}', E, \boldsymbol{\Omega}) \\
&= \int_0^{\infty} d\mathbf{r} \Sigma_t(\mathbf{r}, E) \exp \left( - \int_0^{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \Sigma_t(\mathbf{r} - s' \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}) ds' \right) \\
&\quad \times \frac{\delta(\boldsymbol{\Omega} \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - 1)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \\
&= \int_0^{\infty} s^2 ds \int d\boldsymbol{\Omega}'' \Sigma_t(\mathbf{r}, E) \exp \left( - \int_0^s \Sigma_t(\mathbf{r} - s' \boldsymbol{\Omega}'') ds' \right) \frac{\delta(\boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\Omega}'')}{s^2} \\
&= \int_0^{\infty} ds \Sigma_t(\mathbf{r}, E) \exp \left( - \int_0^s \Sigma_t(\mathbf{r} - s' \boldsymbol{\Omega}) ds' \right) \\
&= \int_0^{\infty} ds \frac{d}{ds} \left\{ - \exp \left( - \int_0^s \Sigma_t(\mathbf{r} - s' \boldsymbol{\Omega}) ds' \right) \right\} \\
&= 1
\end{aligned} \tag{2.145}$$

となる。よって

$$\begin{aligned}
& \int dP_m K_f(P_m \leftarrow P_{m-1}) \\
&= \int d\mathbf{r}_m \int dE_m \int d\boldsymbol{\Omega}_m T(\mathbf{r}_m \leftarrow \mathbf{r}_{m-1}, E_m, \boldsymbol{\Omega}_m) C_f(\mathbf{r}_{m-1}, E_m \leftarrow E_{m-1}, \boldsymbol{\Omega}_m) \\
&= \int dE_m \int d\boldsymbol{\Omega}_m \frac{\chi(E_m \leftarrow E_{m-1}, \boldsymbol{\Omega}_m) \nu(E_{m-1}) \Sigma_f(\mathbf{r}_{m-1}, E_{m-1})}{\Sigma_t(\mathbf{r}_{m-1}, E_{m-1})} \\
&= p_f(\mathbf{r}_{m-1}, E_{m-1})
\end{aligned} \tag{2.146}$$

となる。(2.146) 式の関係式を (2.144) 式で用いると

$$\begin{aligned}
& \int dP \int dP' K_F(P \leftarrow P') \mathcal{S}_{f,j}(P') \\
&= \int dP_1 p_f(P_1) \mathcal{S}_{f,j}(P_1) \\
&\quad + \int dP_2 \int dP_1 p_f(P_2) K_s(P_2 \leftarrow P_1) \mathcal{S}_{f,j}(P_1) \\
&\quad \vdots \\
&\quad + \int dP_{m-1} \cdots \int dP_1 p_f(P_{m-1}) K_s(P_{m-1} \leftarrow P_{m-2}) \cdots K_s(P_2 \leftarrow P_1) \mathcal{S}_{f,j}(P_1) \\
&\quad \vdots \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \int dP_m \cdots \int dP_1 p_f(P_m) K_s(P_m \leftarrow P_{m-1}) \cdots K_s(P_2 \leftarrow P_1) \mathcal{S}_{f,j}(P_1)
\end{aligned} \tag{2.147}$$

となる。一方、(2.132) 式の分母は、(2.116) 式を用いて

$$\int dP \mathcal{S}_{f,j}(P) = \int d\mathbf{r} \int dE \int d\boldsymbol{\Omega} \int d\mathbf{r}' T(\mathbf{r} \leftarrow \mathbf{r}', E, \boldsymbol{\Omega}) S_f(\mathbf{r}', E, \boldsymbol{\Omega}) \tag{2.148}$$

であり、(2.145) 式より

$$\int dP \mathcal{S}_{f,j}(P) = \int d\mathbf{r}' \int dE \int d\boldsymbol{\Omega} S_f(\mathbf{r}', E, \boldsymbol{\Omega}) = \int dP S_f(P) \tag{2.149}$$

となる。(2.147) 式と (2.149) 式を (2.132) 式に代入すると

$$k_j = \frac{\sum_{m=1}^{\infty} \int dP_m \cdots \int dP_1 p_f(P_m) K_s(P_m \leftarrow P_{m-1}) \cdots K_s(P_2 \leftarrow P_1) \mathcal{S}_{f,j}(P_1)}{\int dP \mathcal{S}_{f,j}(P)} \tag{2.150}$$

となり、(2.143) 式と全く同じとなる。よって、(2.109) 式と (2.132) 式は等価である。

### 2.6.2 中性子バランス比による実効増倍率

前項では、実効増倍率をある世代において源として発生させた中性子数と核分裂によって発生した中性子数の比で定義した。しかし、実効増倍率は中性子の消滅と生成のバランスにより定義することもできる。即ち、ある世代で消滅した中性子数に対するその世代で生成し



た中性子数の比で定義する。これを式で表現することを考える。まず、第  $j$  世代の放出密度 (2.99) 式を全位相空間で積分すると

$$\int dP q_j(P) = \int dP \int dP' \mathcal{K}_s(P \leftarrow P') q_j(P') + \int dP S_{f,j}(P) \quad (2.151)$$

となる。ここで、

$$\Sigma_t(\mathbf{r}, E') = \Sigma_a(\mathbf{r}, E') + \int dE \int d\boldsymbol{\Omega} \Sigma_s(\mathbf{r}, E \leftarrow E', \boldsymbol{\Omega} \leftarrow \boldsymbol{\Omega}') \quad (2.152)$$

であることを用いると、右辺第 1 項は

$$\begin{aligned} & \int dP \int dP' \mathcal{K}_s(P \leftarrow P') q_j(P') \\ &= \int d\mathbf{r} \int dE \int d\boldsymbol{\Omega} \int d\mathbf{r}' \int dE' \int d\boldsymbol{\Omega}' \frac{\Sigma_s(\mathbf{r}, E \leftarrow E', \boldsymbol{\Omega} \leftarrow \boldsymbol{\Omega}')}{\Sigma_t(\mathbf{r}, E')} T(\mathbf{r} \leftarrow \mathbf{r}', E', \boldsymbol{\Omega}') \\ & \quad \times q_j(\mathbf{r}', E', \boldsymbol{\Omega}') \\ &= \int d\mathbf{r} \int d\mathbf{r}' \int dE' \int d\boldsymbol{\Omega}' \left( 1 - \frac{\Sigma_a(\mathbf{r}, E')}{\Sigma_t(\mathbf{r}, E')} \right) T(\mathbf{r} \leftarrow \mathbf{r}', E', \boldsymbol{\Omega}') q_j(\mathbf{r}', E', \boldsymbol{\Omega}') \quad (2.153) \end{aligned}$$

となり、(2.145) 式を用いると

$$\begin{aligned} & \int dP \int dP' \mathcal{K}_s(P \leftarrow P') q_j(P') \\ &= \int d\mathbf{r}' \int dE' \int d\boldsymbol{\Omega}' q_j(\mathbf{r}', E', \boldsymbol{\Omega}') \\ & \quad - \int d\mathbf{r} \int d\mathbf{r}' \int dE' \int d\boldsymbol{\Omega}' \frac{\Sigma_a(\mathbf{r}, E')}{\Sigma_t(\mathbf{r}, E')} T(\mathbf{r} \leftarrow \mathbf{r}', E', \boldsymbol{\Omega}') q_j(\mathbf{r}', E', \boldsymbol{\Omega}') \\ &= \int dP q_j(P) - \int d\mathbf{r}' \int d\mathbf{r} \int dE \int d\boldsymbol{\Omega} \frac{\Sigma_a(\mathbf{r}', E)}{\Sigma_t(\mathbf{r}', E)} T(\mathbf{r}' \leftarrow \mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) q_j(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) \quad (2.154) \end{aligned}$$

となる。これを (2.151) 式に代入すると

$$\begin{aligned} \int dP S_{f,j}(P) &= \int d\mathbf{r} \int dE \int d\boldsymbol{\Omega} \int d\mathbf{r}' \frac{\Sigma_a(\mathbf{r}', E)}{\Sigma_t(\mathbf{r}', E)} T(\mathbf{r}' \leftarrow \mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) q_j(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) \\ &= \int d\mathbf{r} \int dE \int d\boldsymbol{\Omega} \mathcal{K}_a(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) q_j(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) \quad (2.155) \end{aligned}$$

となる。ここで、 $\mathcal{K}_a(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega})$  は消滅カーネル (annihilation kernel) であり、

$$\mathcal{K}_a(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) \equiv \int d\mathbf{r}' \frac{\Sigma_a(\mathbf{r}', E)}{\Sigma_t(\mathbf{r}', E)} T(\mathbf{r}' \leftarrow \mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) \quad (2.156)$$

と定義した。(2.156) 式を (2.102) 式に代入すると

$$k_j = \frac{\int dP \int dP' \mathcal{K}_f(P \leftarrow P') q_j(P')}{\int dP \mathcal{K}_a(P) q_j(P)} \quad (2.157)$$

となる。(2.105) 式を用いて放出密度を核分裂源分布で表すと

$$k_j = \frac{\int dP \int dP'' \mathcal{K}_f(P \leftarrow P'') \sum_{m=0}^{\infty} \int dP' \mathcal{K}_{s,m}(P'' \leftarrow P') S_{f,j}(P')}{\int dP \mathcal{K}_a(P) \sum_{m=0}^{\infty} \int dP' \mathcal{K}_{s,m}(P \leftarrow P') S_{f,j}(P')} \quad (2.158)$$

$$= \frac{\int dP \int dP' \mathcal{K}_F(P \leftarrow P') S_{f,j}(P')}{\int dP \int dP' \mathcal{K}_A(P \leftarrow P') S_{f,j}(P')} \quad (2.159)$$

となる。ここで、

$$\mathcal{K}_A(P \leftarrow P') \equiv \mathcal{K}_a(P) \sum_{m=0}^{\infty} \mathcal{K}_{s,m}(P \leftarrow P') \quad (2.160)$$

と定義した。

以上では、放出密度方程式に基づいて中性子バランス比の実効増倍率を求めたが、衝突密度方程式についても同様に実効増倍率を求めることができる。(2.119) 式の両辺を位相空間  $P$  について積分すると

$$\int dP \psi_j(P) = \int dP \int dP' K_s(P \leftarrow P') \psi_j(P') + \int dP S_{f,j}(P) \quad (2.161)$$

となり、右辺第 1 項は (2.113) 式の  $K_s$  の定義から

$$\begin{aligned} & \int dP \int dP' K_s(P \leftarrow P') \psi_j(P') \\ &= \int d\mathbf{r} \int dE \int d\boldsymbol{\Omega} \int d\mathbf{r}' \int dE' \int d\boldsymbol{\Omega}' T(\mathbf{r} \leftarrow \mathbf{r}', E, \boldsymbol{\Omega}) \frac{\Sigma_s(\mathbf{r}', E \leftarrow E', \boldsymbol{\Omega} \leftarrow \boldsymbol{\Omega}')}{\Sigma_t(\mathbf{r}', E')} \\ & \quad \times \psi_j(\mathbf{r}', E', \boldsymbol{\Omega}') \end{aligned} \quad (2.162)$$

である。更に、(2.145) 式を用いると

$$\begin{aligned} & \int dP \int dP' K_s(P \leftarrow P') \psi_j(P') \\ &= \int dE \int d\boldsymbol{\Omega} \int d\mathbf{r}' \int dE' \int d\boldsymbol{\Omega}' \frac{\Sigma_s(\mathbf{r}', E \leftarrow E', \boldsymbol{\Omega} \leftarrow \boldsymbol{\Omega}')}{\Sigma_t(\mathbf{r}', E')} \psi_j(\mathbf{r}', E', \boldsymbol{\Omega}') \end{aligned} \quad (2.163)$$

であり、(2.152) 式を用いると

$$\begin{aligned} & \int dP \int dP' K_s(P \leftarrow P') \psi_j(P') \\ &= \int d\mathbf{r}' \int dE' \int d\boldsymbol{\Omega}' \left( 1 - \frac{\Sigma_a(\mathbf{r}', E')}{\Sigma_t(\mathbf{r}', E')} \right) \psi_j(\mathbf{r}', E', \boldsymbol{\Omega}') \\ &= \int dP \psi_j(P) - \int d\mathbf{r} \int dE \int d\boldsymbol{\Omega} \frac{\Sigma_a(\mathbf{r}, E)}{\Sigma_t(\mathbf{r}, E)} \psi_j(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) \end{aligned} \quad (2.164)$$

となる。これを (2.161) 式に代入すると

$$\begin{aligned} \int dP S_{f,j}(P) &= \int d\mathbf{r} \int dE \int d\boldsymbol{\Omega} \frac{\Sigma_a(\mathbf{r}, E)}{\Sigma_t(\mathbf{r}, E)} \psi_j(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) \\ &= \int dP \mathcal{K}_a(P) \psi_j(P) \end{aligned} \quad (2.165)$$



となる。ここで、

$$K_a(P) \equiv \frac{\Sigma_a(\mathbf{r}, E)}{\Sigma_t(\mathbf{r}, E)} \quad (2.166)$$

と定義した。(2.165) 式を (2.127) 式に代入すると

$$k_j = \frac{\int dP \int dP' K_f(P \leftarrow P') \psi_j(P')}{\int dP K_a(P) \psi_j(P)} \quad (2.167)$$

であり、(2.128) 式を用いて衝突密度を核分裂源で表すと

$$k_j = \frac{\int dP \int dP'' K_f(P \leftarrow P'') \sum_{m=0}^{\infty} \int dP' K_{s,m}(P'' \leftarrow P') \mathcal{S}_{f,j}(P')}{\int dP K_a(P) \sum_{m=0}^{\infty} \int dP' K_{s,m}(P \leftarrow P') \mathcal{S}_{f,j}(P')} \quad (2.168)$$

$$= \frac{\int dP \int dP' K_F(P \leftarrow P') \mathcal{S}_{f,j}(P')}{\int dP \int dP' K_A(P \leftarrow P') \mathcal{S}_{f,j}(P')} \quad (2.169)$$

となる。ここで、

$$K_A(P \leftarrow P') = K_a(P) \sum_{m=0}^{\infty} K_{s,m}(P \leftarrow P') \quad (2.170)$$

と定義した。(2.159) 式もしくは (2.169) 式が中性子バランス比による実効増倍率の定義で、どちらも等価である。

### 2.6.3 アナログモンテカルロ法におけるスコアリング

ここまで、実効増倍率についてノイマン級数で表現し、モンテカルロシミュレーションに適した形式を導出した。しかし、これらの形式はまだ、実際のモンテカルロコードでのスコアリングに適した形ではない。本項では、アナログモンテカルロ法でのスコアリングについて考える。中性子生成比に対する実効増倍率は、(2.143) 式で定義され、

$$k_j = \frac{\sum_{m=1}^{\infty} \int dP_m \cdots \int dP_1 p_f(P_m) K_s(P_m \leftarrow P_{m-1}) \cdots K_s(P_2 \leftarrow P_1) \mathcal{S}_{f,j}(P_1)}{\int dP \mathcal{S}_{f,j}(P)} \quad (2.171)$$

である。この分子について吸収確率を用いて表し、中性子の生成から吸収までのヒストリーを陽に表現することを考える。そのために、(2.130) 式で定義される散乱カーネルについて行き先の位相空間  $P$  で積分すると

$$\int dP K_s(P \leftarrow P') = \int d\mathbf{r} \int dE \int d\boldsymbol{\Omega} T(\mathbf{r} \leftarrow \mathbf{r}', E, \boldsymbol{\Omega}) C_s(\mathbf{r}', E \leftarrow E', \boldsymbol{\Omega} \leftarrow \boldsymbol{\Omega}') \quad (2.172)$$

となり、(2.145) 式を用いると

$$\int dPK_s(P \leftarrow P') = \frac{\int dE \int d\Omega \Sigma_s(\mathbf{r}', E \leftarrow E', \Omega \leftarrow \Omega')}{\Sigma_t(\mathbf{r}', E')} = \frac{\Sigma_s(\mathbf{r}', E')}{\Sigma_t(\mathbf{r}', E')} \quad (2.173)$$

となる。ここで、

$$\Sigma_s(\mathbf{r}', E') \equiv \int dE \int d\Omega \Sigma_s(\mathbf{r}', E \leftarrow E', \Omega \leftarrow \Omega') \quad (2.174)$$

と定義した。更に、 $(\mathbf{r}', E')$  における吸収確率を

$$\alpha(\mathbf{r}', E') \equiv \frac{\Sigma_a(\mathbf{r}', E')}{\Sigma_t(\mathbf{r}', E')} \quad (2.175)$$

と定義すると、(2.173) 式は

$$\int dPK_s(P \leftarrow P') = 1 - \alpha(\mathbf{r}', E') \quad (2.176)$$

$$= 1 - \alpha(P') \quad (2.177)$$

となる。これらの関係式を用いると、(2.171) 式の分子第  $m$  項は

$$\begin{aligned} & \int dP_m \cdots \int dP_1 p_f(P_m) K_s(P_m \leftarrow P_{m-1}) \cdots K_s(P_2 \leftarrow P_1) \mathcal{S}_{f,j}(P_1) \\ &= \int dP_m \cdots \int dP_1 p_f(P_m) [\alpha(P_m) + (1 - \alpha(P_m))] \\ & \quad \times K_s(P_m \leftarrow P_{m-1}) \cdots K_s(P_2 \leftarrow P_1) \mathcal{S}_{f,j}(P_1) \\ &= \int dP_m \cdots \int dP_1 p_f(P_m) \alpha(P_m) K_s(P_m \leftarrow P_{m-1}) \cdots K_s(P_2 \leftarrow P_1) \mathcal{S}_{f,j}(P_1) \\ & \quad + \int dP_{m+1} \cdots \int dP_1 p_f(P_m) K_s(P_{m+1} \leftarrow P_m) \cdots K_s(P_2 \leftarrow P_1) \mathcal{S}_{f,j}(P_1) \\ &= \int dP_m \cdots \int dP_1 p_f(P_m) \alpha(P_m) K_s(P_m \leftarrow P_{m-1}) \cdots K_s(P_2 \leftarrow P_1) \mathcal{S}_{f,j}(P_1) \\ & \quad + \int dP_{m+1} \cdots \int dP_1 p_f(P_m) \alpha(P_{m+1}) K_s(P_{m+1} \leftarrow P_m) \cdots K_s(P_2 \leftarrow P_1) \mathcal{S}_{f,j}(P_1) \\ & \quad \vdots \end{aligned} \quad (2.178)$$

となる。この式について  $m = 1$  から  $\infty$  まで和を取ると

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=1}^{\infty} \int dP_m \cdots \int dP_1 p_f(P_m) K_s(P_m \leftarrow P_{m-1}) \cdots K_s(P_2 \leftarrow P_1) \mathcal{S}_{f,j}(P_1) \\
&= \int dP_1 p_f(P_1) \alpha(P_1) \mathcal{S}_{f,j}(P_1) \\
&\quad + \int dP_2 \int dP_1 [p_f(P_2) + p_f(P_1)] \alpha(P_2) K_s(P_2 \leftarrow P_1) \mathcal{S}_{f,j}(P_1) \\
&\quad \vdots \\
&\quad + \int dP_m \cdots \int dP_1 [p_f(P_m) + \cdots + p_f(P_1)] \alpha(P_m) K_s(P_m \leftarrow P_{m-1}) \cdots \\
&\quad \times K_s(P_2 \leftarrow P_1) \mathcal{S}_{f,j}(P_1) \\
&\quad \vdots \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \int dP_m \cdots \int dP_1 \sum_{\ell=1}^m p_f(P_\ell) \alpha(P_m) K_s(P_m \leftarrow P_{m-1}) \cdots K_s(P_2 \leftarrow P_1) \mathcal{S}_{f,j}(P_1)
\end{aligned} \tag{2.179}$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \int dP_m \cdots \int dP_1 \sum_{\ell=1}^m p_f(P_\ell) H(P_m, P_{m-1}, \dots, P_1) \tag{2.180}$$

となる。ここで、

$$H(P_m, P_{m-1}, \dots, P_1) \equiv \alpha(P_m) K_s(P_m \leftarrow P_{m-1}) \cdots K_s(P_2 \leftarrow P_1) \mathcal{S}_{f,j}(P_1) \tag{2.181}$$

と定義した。よって、(2.171) 式は

$$k_j = \frac{\sum_{m=1}^{\infty} \int dP_m \cdots \int dP_1 \sum_{\ell=1}^m p_f(P_\ell) H(P_m, P_{m-1}, \dots, P_1)}{\int dP \mathcal{S}_{f,j}(P)} \tag{2.182}$$

となる。 $H(P_m, P_{m-1}, \dots, P_1)$  は、生成してから吸収されるまでの中性子のヒストリーを表しており、(2.182) 式の分子は、各衝突点で中性子生成数  $p_f$  をスコアリングすることによって計算できることが分かる。また、第  $j$  世代の増倍率は、そのようにしてスコアリングされた中性子生成数を、発生した中性子数で規格化することにより計算できることが分かる。

#### 2.6.4 非アナログモンテカルロ法におけるスコアリング

(2.182) 式は、アナログモンテカルロ法で増倍率を計算するためのスコアリング形式を示したものであった。しかしながら、実際のモンテカルロシミュレーションでは、アナログモンテカルロ法でシミュレーションされることは稀で、ほとんどの場合、非アナログモンテカルロ法 (non-analog Monte Carlo) によってシミュレーションされる。本項では、前項で導出した実効増倍率に対して、非アナログモンテカルロ表現を考える。(2.150) 式は、以下のよう

に変形することができる。

$$\begin{aligned}
k_j &= \frac{1}{\int dP S_{f,j}(P)} \sum_{m=1}^{\infty} \int dP_m \cdots \int dP_1 p_f(P_m) K_s(P_m \leftarrow P_{m-1}) \cdots K_s(P_2 \leftarrow P_1) S_{f,j}(P_1) \\
&= \frac{1}{\int dP S_{f,j}(P)} \sum_{m=1}^{\infty} \int dP_m \cdots \int dP_1 p_f(P_m) \prod_{i=1}^{m-1} \frac{K_s(P_{i+1} \leftarrow P_i) S_{f,j}(P_1)}{\tilde{K}_s(P_{i+1} \leftarrow P_i) \tilde{S}_{f,j}(P_1)} \\
&\quad \times \tilde{K}_s(P_m \leftarrow P_{m-1}) \cdots \tilde{K}_s(P_2 \leftarrow P_1) \tilde{S}_{f,j}(P_1)
\end{aligned} \tag{2.183}$$

ここで、 $\tilde{K}_s$  と  $\tilde{S}$  は、それぞれバイアスがかけられた散乱についての遷移カーネルと 1 回衝突中性子源である。また、 $\tilde{S}$  は

$$\tilde{S}_{f,j}(P_1) = \int d\mathbf{r}_0 \tilde{T}(\mathbf{r}_1 \leftarrow \mathbf{r}_0, E_1, \boldsymbol{\Omega}_1) \tilde{S}_{f,j}(\mathbf{r}_0, E_1, \boldsymbol{\Omega}_1) \tag{2.184}$$

と表され、 $\tilde{T}$  はバイアスがかけられた輸送カーネル、 $\tilde{S}$  はバイアスがかけられた中性子源である。前項で導出したのと同様に、(2.183) 式を吸収確率を用いて表すと

$$\begin{aligned}
k_j &= \frac{1}{\int dP S_{f,j}(P)} \sum_{m=1}^{\infty} \int dP_m \cdots \int dP_1 \left[ \sum_{\ell=1}^m p_f(P_\ell) \prod_{i=1}^{\ell-1} \frac{K_s(P_{i+1} \leftarrow P_i) S_{f,j}(P_1)}{\tilde{K}_s(P_{i+1} \leftarrow P_i) \tilde{S}_{f,j}(P_1)} \right] \\
&\quad \times \tilde{\alpha}(P_m) \tilde{K}_s(P_m \leftarrow P_{m-1}) \cdots \tilde{K}_s(P_2 \leftarrow P_1) \tilde{S}_{f,j}(P_1)
\end{aligned} \tag{2.185}$$

となる。ここで、 $\tilde{\alpha}$  は、バイアスがかけられた吸収確率で、

$$\tilde{\alpha}(P_m) \equiv 1 - \int dP \tilde{K}_s(P \leftarrow P_m) \tag{2.186}$$

で定義される。簡単のため、

$$W(P_\ell, \cdots, P_1) \equiv \prod_{i=1}^{\ell-1} \frac{K_s(P_{i+1} \leftarrow P_i) S_{f,j}(P_1)}{\tilde{K}_s(P_{i+1} \leftarrow P_i) \tilde{S}_{f,j}(P_1)} \tag{2.187}$$

$$\tilde{H}(P_m, P_{m-1}, \cdots, P_1) \equiv \tilde{\alpha}(P_m) \tilde{K}_s(P_m \leftarrow P_{m-1}) \cdots \tilde{K}_s(P_2 \leftarrow P_1) \tilde{S}_{f,j}(P_1) \tag{2.188}$$

と定義すると、(2.185) 式は

$$\begin{aligned}
k_j &= \frac{1}{\int dP S_{f,j}(P)} \sum_{m=1}^{\infty} \int dP_m \cdots \int dP_1 \left[ \sum_{\ell=1}^m p_f(P_\ell) W(P_\ell, \cdots, P_1) \right] \\
&\quad \times \tilde{H}(P_m, P_{m-1}, \cdots, P_1)
\end{aligned} \tag{2.189}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\int dP S_{f,j}(P)} \sum_{m=1}^{\infty} \int dP_m \cdots \int dP_1 \left[ \sum_{\ell=1}^m W_f(P_\ell, \cdots, P_1) \right] \\
&\quad \times \tilde{H}(P_m, P_{m-1}, \cdots, P_1)
\end{aligned} \tag{2.190}$$

となる。ここで、更に

$$W_f(P_\ell, \cdots, P_1) \equiv p_f(P_\ell) W(P_\ell, \cdots, P_1) \tag{2.191}$$



と定義した。 $W(P_\ell, \dots, P_1)$  は中性子が  $\ell$  回目の散乱前の重み、 $W_f(P_\ell, \dots, P_1)$  は実効増倍率のスコアリング量を表している。従って、第  $j$  世代の実効増倍率は、

$$\text{Est}[k_j] = \frac{1}{N} \sum_{\ell} w_{f,\ell} \quad (2.192)$$

と計算することができる。ここで、 $w_{f,\ell}$  は衝突点  $\ell$  における実効増倍率のスコアリング量、 $N$  は第  $j$  世代の発生中性子の総重みを表している。(ここでは、各世代において発生中性子の総重みは一定であるとしている。) また、 $\text{Est}[X]$  は、パラメータ  $X$  のモンテカルロ評価であることを表している。

### 2.6.5 世代間の規格化

固有値計算では、核分裂源 (中性子源) の強度は任意であるので、核分裂源の規格化が必要である。本項では、モンテカルロ法における固有値計算で行われている規格化について考察する。既に、2.5.1 項で見たように、世代間の規格化は (2.100) 式で表され、これに放出密度のノイマン級数解である (2.105) 式を代入すると

$$S_{f,j+1}(P) = \frac{1}{k_j} \int dP'' \int dP' \mathcal{K}_f(P'' \leftarrow P') \sum_{m=0}^{\infty} \mathcal{K}_{s,m}(P'' \leftarrow P') S_{f,j}(P') \quad (2.193)$$

となり、(2.133) 式の定義を用いると

$$S_{f,j+1}(P) = \frac{1}{k_j} \int dP' \mathcal{K}_F(P \leftarrow P') S_{f,j}(P') \quad (2.194)$$

となる。更に、放出密度に対する増倍率の定義である (2.133) 式を用いると

$$S_{f,j+1}(P) = \frac{\int dP' \mathcal{K}_F(P \leftarrow P') S_{f,j}(P')}{\int dP \int dP' \mathcal{K}_F(P \leftarrow P') S_{f,j}(P')} \int dP S_{f,j}(P) \quad (2.195)$$

となる。(2.195) 式は、第  $j+1$  世代の初期核分裂源分布が第  $j$  世代における規格化された核分裂源分布によって与えられることを示している。 $\int dP S_{f,j}(P)$  は第  $j$  世代の総スタート (源) 中性子数であり、これが 1 に規格化されているとすると、

$$\frac{\int dP' \mathcal{K}_F(P \leftarrow P') S_{f,j}(P')}{\int dP \int dP' \mathcal{K}_F(P \leftarrow P') S_{f,j}(P')} \quad (2.196)$$

は、第  $j$  世代において、中性子が位相空間  $P$  で核分裂により発生する確率を表すことになる。

(2.195) 式がモンテカルロ評価でどのようなスコアリング量になるかを考える。まず、(2.196) 式の分母は、前項で既に見たとおり、

$$\text{Est} \left[ \int dP \int dP' \mathcal{K}_F(P \leftarrow P') S_{f,j}(P') \right] = \frac{1}{N} \sum_{\ell} w_{f,\ell} \quad (2.197)$$

である。ここで、 $\text{Est}[X]$  は、パラメータ  $X$  の単位重み当りのモンテカルロ評価であることを表している。(2.196) 式の分子は、衝突点  $\mathbf{r}_c$  で  $\int dP \int dP' \mathcal{K}_F(P \leftarrow P') S_{f,j}(P')$  を評価すると考え、デルタ関数を用いて

$$\begin{aligned} \int dP' \mathcal{K}_F(\mathbf{r}_c, E, \boldsymbol{\Omega} \leftarrow P') S_{f,j}(P') &= \int dP \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_c) \int dP' \mathcal{K}_F(P \leftarrow P') S_{f,j}(P') \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \int dP_m \cdots \int dP_1 \left[ \sum_{\ell=1}^m p_f(P_\ell) \delta(\mathbf{r}_\ell - \mathbf{r}_c) W(P_\ell, \dots, P_1) \right] \\ &\quad \times \tilde{\alpha}(P_m) \tilde{K}_s(P_m \leftarrow P_{m-1}) \cdots \tilde{K}_s(P_2 \leftarrow P_1) \tilde{S}_{f,j}(P_1) \end{aligned} \quad (2.198)$$

と表すことができる。よって、(2.196) 式の分子は

$$\text{Est} \left[ \int dP' \mathcal{K}_F(P \leftarrow P') S_{f,j}(P') \right] = \frac{1}{N} w_{f,\ell} \quad (2.199)$$

によって評価することができる。(2.197) 式と (2.199) 式から第  $j+1$  世代の初期重みは

$$\text{Est} [S_{f,j+1}(P)] = \frac{w_{f,\ell}}{\sum_{\ell} w_{f,\ell}} \quad (2.200)$$

となるように規格化されることが分かる。(2.200) 式は単位重み当りのスコアリング量を表しているので、第  $j$  世代での総重みが  $N$  であるとする、第  $j+1$  世代での総重みもこの規格化により  $N$  となる。即ち、各世代において総重みは一定となる。(これは、(2.104) 式が成り立つことから分かる。) このとき、実際に第  $j+1$  世代の源中性子に与えられる初期重みは

$$\text{Est}_N [S_{f,j+1}(P)] = \frac{w_{f,\ell}}{\sum_{\ell} w_{f,\ell}} N \quad (2.201)$$

となる。ここで、 $\text{Est}_N[X]$  は、総重み  $N$  に対するパラメータ  $X$  のモンテカルロ評価を表すものと定義している。

(2.201) 式はすべての衝突点でのスコアリング量を規格化することを示唆している。即ち、衝突点がすべて核分裂点となりうること (possible fission site) を示唆している。しかし、衝突点をすべて核分裂点とすることは、モンテカルロ計算の統計精度上好ましいことではない。そのため、モンテカルロコードに応じて様々な手法が実装されている。例えば、MVP コード [27] の場合、すべての衝突点が必ずしも核分裂点とはならず、ユーザの入力値によって調整される。また、核分裂中性子に割り当てられる重みは、ユーザの入力値によって決定され、それに基づいて発生する核分裂中性子数は決定される。このとき、核分裂中性子数のスコアリング量は

$$w_{f,\ell} = n_{f,\ell} \bar{w}_f \quad (2.202)$$

となる。ここで、 $n_{f,\ell}$  は衝突点  $\ell$  における核分裂中性子数、 $\bar{w}_f$  は核分裂中性子に割り当てられる重みである。(2.202) 式を (2.200) 式に代入すると

$$\text{Est} [S_{f,j+1}(P)] = \frac{n_{f,\ell} \bar{w}_f}{\sum_{\ell} n_{f,\ell} \bar{w}_f} = \frac{n_{f,\ell}}{\sum_{\ell} n_{f,\ell}} \quad (2.203)$$

となる。(2.200) 式はすべての衝突点に対して規格化することを表しているが、(2.203) 式は次の世代のスタート中性子源として選択された核分裂点のみに対して規格化することを意味している。

MCNP コード [28] における実装は以下のようにになっている。核分裂源分布が収束しているとする

$$k_j \approx k_{j-1} \quad (2.204)$$

である。このとき、衝突点  $\mathbf{r}_c$  における核分裂源は

$$S_{f,j+1}(\mathbf{r}_c) \approx \sum_{m=1}^{\infty} \int dP_m \cdots \int dP_1 \left[ \sum_{\ell=1}^m \frac{\nu \Sigma_f(P_\ell)}{k_{i-1} \Sigma_t(P_\ell)} \delta(\mathbf{r}_\ell - \mathbf{r}_c) W(P_\ell, \dots, P_1) \right] \times \tilde{\alpha}(P_m) \tilde{K}_s(P_m \leftarrow P_{m-1}) \cdots \tilde{K}_s(P_2 \leftarrow P_1) \tilde{S}_{f,j}(P_1) \quad (2.205)$$

と表すことができる。よって、

$$\text{Est}_N [S_{f,j+1}(P)] = \frac{w_{f,\ell}}{k_{i-1}} \quad (2.206)$$

$$= \frac{\nu \Sigma_{f,\ell}}{k_{i-1} \Sigma_{t,\ell}} w_\ell, \quad (2.207)$$

となる。ここで、 $\nu \Sigma_{f,\ell}$  と  $\Sigma_{t,\ell}$  は、それぞれ衝突点  $\ell$  における生成および全断面積である。 $w_\ell$  は、衝突点  $\ell$  で衝突する前の粒子の重みである。(2.206) 式は衝突点  $\ell$  での平均核分裂中性子数を表しており、通常、値は整数ではない。そのとき、衝突点  $\ell$  における平均核分裂中性子数は以下のようにして決定される。

$$n_{f,\ell} = \left\lfloor \frac{w_{f,\ell}}{k_{i-1}} + \xi \right\rfloor \quad (2.208)$$

ここで、 $n_{f,\ell}$  は衝突点  $\ell$  における核分裂中性子数、 $\lfloor x \rfloor$  は  $\max_{k \leq x} k$  となる最大の整数、 $\xi$  は 0 から 1 の一様乱数である。MCNP コードでは、第  $j+1$  世代のスタート中性子はすべて同じ重み  $\bar{w}_{0,j+1}$  であり、その重みは

$$\begin{aligned} \bar{w}_{0,j+1} &= \frac{N}{M_j} \\ &= \frac{N}{\sum_{\ell} n_{f,\ell}} \end{aligned} \quad (2.209)$$

で決定される。ここで、 $M_j$  は第  $j$  世代で生成された総核分裂中性子数で

$$M_j = \sum_{\ell} n_{f,\ell} \quad (2.210)$$

である。 $\bar{w}_{0,j+1}$  を用いて、(2.206) 式を書き直すと

$$\text{Est}_N [S_{f,j+1}(P)] = n_{f,\ell} \bar{w}_{0,j+1} \quad (2.211)$$

$$= \frac{n_{f,\ell}}{\sum_{\ell} n_{f,\ell}} N \quad (2.212)$$

となる。(2.212) 式から分かるように、各々の世代においてスタート中性子の総重みは一定であり、それぞれの核分裂中性子は等確率で生成される。しかし、総スタート中性子数は世代毎に異なる。



## 第3章 モンテカルロ摂動計算手法における 源摂動評価手法の開発

### 3.1 緒言

原子炉の炉心解析においてボイド反応度価値、ドップラー反応度価値、物質反応度価値は非常に重要な物理量であり、精度よく計算することが要求される。これらの物理量は、原子炉の局所的なパラメータ変化に対する実効増倍率の変化量である。決定論的手法では、摂動系と非摂動系における実効増倍率の逆数の差から直接計算することができ、直接計算では数値誤差が問題になる場合は、随伴関数を用いることにより、微小変化量を精度よく求めることが可能である。しかし、モンテカルロ法では、変化量が小さいとそれが統計誤差に埋もれてしまい、直接計算で微小変化量を正確に評価することは困難である。また、モンテカルロ法で随伴関数を計算することは困難が伴い、特に連続エネルギーモンテカルロ法では標準的な手法が未だに確立されていない。

モンテカルロ法で微小変化量を求めるため、これまで、大きく分けて2種類の特別な手法が提案されている。ひとつは相関サンプリング法 (correlated sampling method) [17, p.129] で、摂動系と非摂動系で同じ中性子の飛跡をトラッキングすることにより微小変化量を求める手法である。もうひとつは、微分演算子サンプリング法 (differential operator sampling method) [18] で、あるパラメーターに対する微分係数を直接評価する手法である。この手法は微分モンテカルロ法 (differential Monte Carlo method) とも言われ、1960年代に Olhoeft [29] や高橋 [30] によって用いられている。

これらの手法は、モンテカルロ法で微小変化量を求めるのに非常に有効な手法であり、これまで多くの研究者によって適用されているが、いくつか欠点も指摘されている。相関サンプリング法では摂動量が大きくなると分散が非常に大きくなったり、分散が発散したりする可能性がある [31]。一方、微分演算子サンプリング法では分散が発散が抑えられ、それと等価な相関サンプリング法よりも分散が小さくなることが示されているが [31]、通常2次の効果までしか考慮されず、高次の効果は無視される。また、両手法とも摂動領域が局所的で小さい場合には、統計精度を上げるため、摂動領域を多くの中性子が横切るように分散低減法を使用することなどの工夫が求められる。更に、固有値問題 (臨界問題) においてこれらのモンテカルロ摂動計算手法を用いる場合、源摂動の問題が生じる。もし、摂動が外部源のない増倍体系に加えられると、物質組成などの摂動によって実効増倍率が変化するだけでなく、核分裂源分布も間接的に変化し、それが実効増倍率の変化量に影響を及ぼす。これが、源摂動 (source perturbation) である。モンテカルロ法の固有値計算において、この源摂動の効果を評価することは非常に難しく、源摂動を考慮しない、摂動の直接的な効果のみで評価することが多い。

源摂動の問題を避ける 1 つの有効な手段は、核分裂マトリックス法 (fission matrix method) [32] を利用することである。核分裂マトリックス法は、しばしば、相関サンプリング法や微分演算子サンプリング法と共に用いられる [31, 33–35]。核分裂マトリックス法の利点は、核分裂源分布が摂動を受けたかどうかにかかわらず、摂動系と非摂動系において、ある領域で発生した中性子が別の領域で核分裂を引き起こす確率を行列にした核分裂マトリックスを計算するだけでよいことにある。核分裂マトリックスは、相関サンプリング法や微分演算子サンプリング法を用いれば、1 回のモンテカルロ計算で摂動系と非摂動系の核分裂マトリックスを求めることができる。あとは、それら 2 つの行列から数値計算によって固有値と固有ベクトルを求めれば、反応度を計算できる。しかしながら、核分裂マトリックス法では、核分裂マトリックスを構成するために領域分割しなければならない、領域内で核分裂源は一定であると仮定される。従って、核分裂源分布を正確に表現するためには、分割領域数を多くする必要があり、どのように分割するかもユーザに依存することになる。

モンテカルロ法の固有値計算において、源摂動の効果を直接評価する手法もいくつか提案されている。中川らは、相関サンプリング法で、摂動系と非摂動系の核分裂中性子の重みを次の世代へ伝搬させることにより反応度の 2 次の効果を評価した [36]。北田らは、相関サンプリング法に対する厳密な表現式を提案した [37]。中川らと北田らの手法は、両者とも摂動系の重みを世代間にわたって伝搬させるという点が共通している。これまでも、重みを伝搬させる手法は提案されていたが、世代とともに重みのばらつきが急速に拡大するので、現実的ではないと考えられてきた [38, 39]。実際、中川らの手法では、重みの伝搬は 1 世代に限られ、北田らは、重みばらつきを抑えるため、領域分割し、それぞれの領域において重みを平均化することにより分散を低減するようにした。しかし、領域分割は、核分裂マトリックス法と同様の欠点をもたらすことになる。

本研究では、重みを伝搬させる手法を見直し、相関サンプリング法と微分演算子サンプリング法を用いて、源摂動効果を評価する新しい手法を提案する [40]。

## 3.2 相関サンプリング法による実効増倍率変化量の評価手法

### 3.2.1 定式化

体系にある摂動が加えられたときの実効増倍率の変化を考える。そのとき、中性子生成率比によって定義される第  $j$  世代の実効増倍率の変化量  $\Delta k_j$  は、(2.109) 式を用いて次のよう



に表すことができる。

$$\Delta k_j = k_j^* - k_j \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\int dP \int dP' \mathcal{K}_F^*(P \leftarrow P') S_{f,j}^*(P')}{\int dP S_{f,j}^*(P)} - \frac{\int dP \int dP' \mathcal{K}_F(P \leftarrow P') S_{f,j}(P')}{\int dP S_{f,j}(P)} \\ &= \frac{1}{\int dP S_{f,j}(P)} \int dP \int dP' \left[ \frac{\mathcal{K}_F^*(P \leftarrow P') \frac{S_{f,j}^*(P')}{\int S_{f,j}^*(P'') dP''}}{\mathcal{K}_F(P \leftarrow P') \frac{S_{f,j}(P')}{\int S_{f,j}(P'') dP''}} - 1 \right] \mathcal{K}_F(P \leftarrow P') S_{f,j}(P') \end{aligned} \quad (3.2)$$

ここで、\*は摂動系におけるパラメータであることを意味している。(3.2) 式は、相関サンプリング法における源摂動効果を表現した形式的な式であり、モンテカルロコードにおけるスコアリングに適した形ではない。スコアリングに適した別形式を導出するため、摂動系と非摂動系に対する (2.143) 式を (3.1) 式に代入すると

$$\begin{aligned} \Delta k_j &= \frac{\sum_{m=1}^{\infty} \int dP_m \cdots \int dP_1 p_f^*(P_m) K_s^*(P_m \leftarrow P_{m-1}) \cdots K_s^*(P_2 \leftarrow P_1) S_{f,j}^*(P_1)}{\int dP S_{f,j}^*(P)} \\ &\quad - \frac{\sum_{m=1}^{\infty} \int dP_m \cdots \int dP_1 p_f(P_m) K_s(P_m \leftarrow P_{m-1}) \cdots K_s(P_2 \leftarrow P_1) S_{f,j}(P_1)}{\int dP S_{f,j}(P)} \\ &= \frac{1}{\int dP S_{f,j}(P)} \sum_{m=1}^{\infty} \int dP_m \cdots \int dP_1 \int d\mathbf{r}_0 \\ &\quad \times \left[ \frac{p_f^*(P_m) K_s^*(P_m \leftarrow P_{m-1}) \cdots K_s^*(P_2 \leftarrow P_1) T^*(P_1 \leftarrow \mathbf{r}_0) \frac{S_{f,j}^*(\mathbf{r}_0, E_1, \boldsymbol{\Omega}_1)}{\int dP'' S_{f,j}^*(P'')}}{p_f(P_m) K_s(P_m \leftarrow P_{m-1}) \cdots K_s(P_2 \leftarrow P_1) T(P_1 \leftarrow \mathbf{r}_0) \frac{S_{f,j}(\mathbf{r}_0, E_1, \boldsymbol{\Omega}_1)}{\int dP'' S_{f,j}(P'')}} - 1 \right] \\ &\quad \times p_f(P_m) K_s(P_m \leftarrow P_{m-1}) \cdots K_s(P_2 \leftarrow P_1) T(P_1 \leftarrow \mathbf{r}_0) S_{f,j}(\mathbf{r}_0, E_1, \boldsymbol{\Omega}_1) \\ &= \frac{1}{\int dP S_{f,j}(P)} \sum_{m=1}^{\infty} \int dP_m \cdots \int dP_1 \int d\mathbf{r}_0 (\Gamma_f(P_m, \cdots, P_1, \mathbf{r}_0) - 1) \\ &\quad \times p_f(P_m) K_s(P_m \leftarrow P_{m-1}) \cdots K_s(P_2 \leftarrow P_1) T(P_1 \leftarrow \mathbf{r}_0) S_{f,j}(\mathbf{r}_0, E_1, \boldsymbol{\Omega}_1) \end{aligned} \quad (3.3)$$



ここで、

$$\Gamma_f(P_m, \dots, P_1, \mathbf{r}_0) \equiv \frac{p_f^*(P_m) K_s^*(P_m \leftarrow P_{m-1}) \cdots K_s^*(P_2 \leftarrow P_1) T^*(P_1 \leftarrow \mathbf{r}_0) \frac{S_{f,j}^*(\mathbf{r}_0, E_1, \boldsymbol{\Omega}_1)}{\int dP'' S_{f,j}^*(P'')}}{p_f(P_m) K_s(P_m \leftarrow P_{m-1}) \cdots K_s(P_2 \leftarrow P_1) T(P_1 \leftarrow \mathbf{r}_0) \frac{S_{f,j}(\mathbf{r}_0, E_1, \boldsymbol{\Omega}_1)}{\int dP'' S_{f,j}(P'')}} \quad (3.4)$$

と定義した。(2.171) 式から (2.179) 式に至る導出過程において、 $p_f(P_m)$  を  $(\Gamma_f(P_m, \dots, P_1, \mathbf{r}_0) - 1)p_f(P_m)$  とみなすと、(3.3) 式は次のように変形することができる。

$$\Delta k_j = \frac{1}{\int S_{f,j}(P) dP} \sum_{m=1}^{\infty} \int dP_m \cdots \int dP_1 \int d\mathbf{r}_0 \sum_{\ell=1}^m (\Gamma_f(P_\ell, \dots, P_1, \mathbf{r}_0) - 1) p_f(P_\ell) \times \alpha(P_m) K_s(P_m \leftarrow P_{m-1}) \cdots K_s(P_2 \leftarrow P_1) T(P_1 \leftarrow \mathbf{r}_0) S_{f,j}(\mathbf{r}_0, E_1, \boldsymbol{\Omega}_1) \quad (3.5)$$

この式は、アナログモンテカルロ法で実効増倍率の変化量を評価する式を示している。

非アナログモンテカルロ法の場合は、(2.183) 式から (2.190) 式に至る導出過程と同様の変形をすることにより、(3.5) 式を以下のように書き直す。

$$\begin{aligned} \Delta k_j &= \frac{1}{\int S_{f,j}(P) dP} \sum_{m=1}^{\infty} \int dP_m \cdots \int dP_1 \int d\mathbf{r}_0 \\ &\quad \times \left[ \sum_{\ell=1}^m (\Gamma_f(P_\ell, \dots, P_1, \mathbf{r}_0) - 1) W_f(P_\ell, \dots, P_1, \mathbf{r}_0) \right] \\ &\quad \times \tilde{\alpha}(P_m) \tilde{K}_s(P_m \leftarrow P_{m-1}) \cdots \tilde{K}_s(P_2 \leftarrow P_1) \tilde{T}(P_1 \leftarrow \mathbf{r}_0) \tilde{S}_{f,j}(\mathbf{r}_0, E_1, \boldsymbol{\Omega}_1) \\ &= \frac{1}{\int S_{f,j}(P) dP} \sum_{m=1}^{\infty} \int dP_m \cdots \int dP_1 \int d\mathbf{r}_0 \\ &\quad \times \left[ \sum_{\ell=1}^m (\Gamma_f(P_\ell, \dots, P_1, \mathbf{r}_0) - 1) W_f(P_\ell, \dots, P_1, \mathbf{r}_0) \right] \tilde{H}(P_\ell, \dots, P_1, \mathbf{r}_0) \quad (3.6) \end{aligned}$$

この式中に現れる  $W_f$  は、(2.191) 式に相当する。(3.6) 式は、非アナログモンテカルロ法で、各衝突点において  $(\Gamma_f - 1)W_f$  をスコアリングすることにより、 $\Delta k_j$  が評価できることを示している。更に、(3.6) 式を、源摂動のみの寄与と源摂動を含まない寄与の 2 つの要素に分割するため、

$$\Gamma_{f,\text{NPS}}(P_\ell, \dots, P_1, \mathbf{r}_0) \equiv \frac{p_f^*(P_\ell) K_s^*(P_\ell \leftarrow P_{\ell-1}) \cdots K_s^*(P_2 \leftarrow P_1) T^*(P_1 \leftarrow \mathbf{r}_0)}{p_f(P_\ell) K_s(P_\ell \leftarrow P_{\ell-1}) \cdots K_s(P_2 \leftarrow P_1) T(P_1 \leftarrow \mathbf{r}_0)}, \quad (3.7)$$

$$\Gamma_{\text{PS},j}(P_\ell, \dots, P_1, \mathbf{r}_0) \equiv \frac{\frac{S_{f,j}^*(\mathbf{r}_0, E_1, \boldsymbol{\Omega}_1)}{\int dP'' S_{f,j}^*(P'')}}{S_{f,j}(\mathbf{r}_0, E_1, \boldsymbol{\Omega}_1)} \quad (3.8)$$

と定義する。ただし、源摂動は  $p_f$  や  $K_s$  に対する摂動により間接的に引き起こされる。この定義を用いると

$$\begin{aligned}\Gamma_f(P_\ell, \dots, P_1, \mathbf{r}_0) - 1 &= \Gamma_{f,\text{NPS}}(P_\ell, \dots, P_1, \mathbf{r}_0) \Gamma_{\text{PS},j}(P_\ell, \dots, P_1, \mathbf{r}_0) - 1 \\ &= \Gamma_{f,\text{NPS}}(P_\ell, \dots, P_1, \mathbf{r}_0) - 1 \\ &\quad + \Gamma_{f,\text{NPS}}(P_\ell, \dots, P_1, \mathbf{r}_0) (\Gamma_{\text{PS},j}(P_\ell, \dots, P_1, \mathbf{r}_0) - 1) \quad (3.9)\end{aligned}$$

と書きなおすことができ、(3.9) 式を用いると、(3.6) 式は以下のように表すことができる。

$$\Delta k_j = \Delta k_{\text{NPS},j} + \Delta k_{\text{PS},j} \quad (3.10)$$

インデックス NPS は源摂動を含まない (No Perturbed Source) 寄与に対するパラメータ、インデックス PS は源摂動のみ (Perturbed Source) 寄与に対するパラメータを表している。このとき、 $\Delta k_{\text{NPS},j}$  と  $\Delta k_{\text{PS},j}$  は、それぞれ、以下のように表される。

$$\begin{aligned}\Delta k_{\text{NPS},j} &= \frac{1}{\int S_{f,j}(P) dP} \sum_{m=1}^{\infty} \int dP_m \cdots \int dP_1 \int d\mathbf{r}_0 \\ &\quad \times \left[ \sum_{\ell=1}^m (\Gamma_{f,\text{NPS}}(P_\ell, \dots, P_1, \mathbf{r}_0) - 1) W_f(P_\ell, \dots, P_1, \mathbf{r}_0) \right] \tilde{H}(P_\ell, \dots, P_1, \mathbf{r}_0) \quad (3.11)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta k_{\text{PS},j} &= \frac{1}{\int S_{f,j}(P) dP} \sum_{m=1}^{\infty} \int dP_m \cdots \int dP_1 \int d\mathbf{r}_0 \\ &\quad \times \left[ \sum_{\ell=1}^m \Gamma_{f,\text{NPS}}(P_\ell, \dots, P_1, \mathbf{r}_0) (\Gamma_{\text{PS},j}(P_\ell, \dots, P_1, \mathbf{r}_0) - 1) W_f(P_\ell, \dots, P_1, \mathbf{r}_0) \right] \\ &\quad \times \tilde{H}(P_\ell, \dots, P_1, \mathbf{r}_0) \quad (3.12)\end{aligned}$$

$\Gamma_{f,\text{NPS}}$  は、源摂動を含まない重み係数で、非摂動系に対するランダムウォークから容易に評価することができる。そのとき、 $\Delta k_{\text{NPS},j}$  は以下のように評価される。

$$\text{Est}[\Delta k_{\text{NPS},j}] = \frac{1}{N} \sum_{\ell} (\gamma_{f,\text{NPS},\ell} - 1) w_{f,\ell} \quad (3.13)$$

ここで、 $\gamma_{f,\text{NPS},\ell}$  は  $\Gamma_{f,\text{NPS}}$  に対するスコアリング値であり、 $\ell$  についての和は、第  $j$  世代のすべてのヒストリーにおける、すべての衝突点に対して取るものとする。一方、 $\Delta k_{\text{PS},j}$  は以下のように評価される。

$$\text{Est}[\Delta k_{\text{PS},j}] = \frac{1}{N} \sum_{\ell} \gamma_{f,\text{NPS},\ell} (\gamma_{\text{PS},j} - 1) w_{f,\ell} \quad (3.14)$$

ここで、 $\gamma_{\text{PS},j}$  は、

$$\frac{S_{f,j}^*(\mathbf{r}_0, E_1, \boldsymbol{\Omega}_1)}{\int dP'' S_{f,j}^*(P'')} \frac{S_{f,j}(\mathbf{r}_0, E_1, \boldsymbol{\Omega}_1)}{\int dP'' S_{f,j}(P'')}$$

に対するスコアリング値で、中性子のスタート位置に依存し、それぞれ異なる値を取る。

### 3.2.2 源摂動のスコアリング

本項では、相関サンプリング法における源摂動のスコアリングについて考える。前項において、実効増倍率の変化量に対する源摂動効果は (3.14) 式で計算され、この効果を計算するには、 $\gamma_{PS}$  を評価する必要がある。摂動系と非摂動系に対する (2.195) 式を用いると、以下の式が得られる。

$$\frac{\frac{S_{f,j+1}^*(P)}{\int S_{f,j+1}^*(P')dP'}}{\frac{S_{f,j+1}(P)}{\int S_{f,j+1}(P')dP'}} = \frac{\frac{\int dP' \mathcal{K}_F^*(P \leftarrow P') S_{f,j}^*(P')}{\int dP \int dP' \mathcal{K}_F^*(P \leftarrow P') S_{f,j}^*(P')}}{\frac{\int dP' \mathcal{K}_F(P \leftarrow P') S_{f,j}(P')}{\int dP \int dP' \mathcal{K}_F(P \leftarrow P') S_{f,j}(P')}} \quad (3.15)$$

第  $j$  世代の終わりにおいて、 $\gamma_{PS,j+1}$  は以下ようになる。

$$\gamma_{PS,j+1} = \text{Est}_N \left[ \frac{\frac{S_{f,j+1}^*(\mathbf{r}_0, E_1, \boldsymbol{\Omega}_1)}{\int dP'' S_{f,j+1}^*(P'')}}{\frac{S_{f,j+1}(\mathbf{r}_0, E_1, \boldsymbol{\Omega}_1)}{\int dP'' S_{f,j+1}(P'')}} \right] = \frac{\frac{w_{f,\ell}^*}{\sum_{\ell} w_{f,\ell}^*}}{\frac{w_{f,\ell}}{\sum_{\ell} w_{f,\ell}}} \quad (3.16)$$

ここで、 $w_{f,\ell}^*$  は、摂動系における実効増倍率のスコアリング値で以下のように表すことができる。

$$w_{f,\ell}^* = \gamma_{f,\ell,j} w_{f,\ell} \quad (3.17)$$

$$\gamma_{f,\ell,j} \equiv \gamma_{f,NPS,\ell} \gamma_{PS,j} \quad (3.18)$$

また、2.6.5 項で見たように、世代間の規格化の過程において、 $w_{f,\ell}$  は、 $n_{f,\ell} \bar{w}_f$  に置き換えることができる。よって、(2.202) 式と (3.17) 式を用いて、(3.16) 式は

$$\gamma_{PS,j+1} = \frac{\frac{\gamma_{f,\ell,j} n_{f,\ell} \bar{w}_f}{\sum_{\ell} \gamma_{f,NPS,\ell} \gamma_{f,\ell,j}}}{\frac{n_{f,\ell} \bar{w}_f}{\sum_{\ell} n_{f,\ell} \bar{w}_f}} = \frac{\gamma_{f,\ell,j} \sum_{\ell} n_{f,\ell}}{\sum_{\ell} n_{f,\ell} \gamma_{f,\ell,j}} \quad (3.19)$$

となる。 $\gamma_{PS,j+1}$  は、第  $j$  世代のランダムウォークの結果から、(3.19) 式により評価される。この式は、重み係数に対する規格化の式を表しており、実効増倍率の重みが世代間で規格化されるのに伴い、重み係数も (3.19) 式によって規格化されなければならないということを意味している。

### 3.2.3 アルゴリズム

本項では、相関サンプリング法を用いて実効増倍率の変化量を評価するためのアルゴリズムについて考える。源摂動効果については、前項までで定式化された手法を用い、通常のも



ンテカルロ法における源反復法の中で評価することを考える。即ち、源摂動効果を評価するために追加のランダムウォークを行うことなく、通常のランダムウォークから得られる情報のみで源摂動効果を評価する。

実効増倍率の変化量は、(3.13) 式と (3.14) 式によって評価され、このために  $\gamma_{f,NPS,\ell}$  と  $\gamma_{PS,j}$  を計算する必要がある。 $\gamma_{f,NPS,\ell}$  は各世代独立に計算することができるが、 $\gamma_{PS,j}$  は、一つ前の世代のスコアリング量に依存する。(3.18) 式を (3.19) 式に代入すると、

$$\gamma_{PS,j+1} = \frac{\gamma_{f,NPS,\ell} \gamma_{PS,j} \sum_{\ell} n_{f,\ell}}{\sum_{\ell} n_{f,\ell} \gamma_{f,NPS,\ell} \gamma_{PS,j}} \quad (3.20)$$

となり、源摂動を表す重み係数は、世代間の反復から計算しなければならない。しかし、このまま反復させると  $\Delta k_{PS,j}$  の分散は、反復させる世代の長さに依存することになり、各世代において、分散評価のためのサンプル数が異なることになる。そこで、固有値計算で行われる通常の反復世代とは別に、源摂動の重み係数の反復世代の概念を導入し、以下のようにして源摂動効果を計算する。まず、最初の源摂動反復世代 (第 0 世代) については

$$\gamma_{PS,j,0} = 1 \quad (3.21)$$

$$\text{Est} [\Delta k_{PS,j,0}] = 0 \quad (3.22)$$

で、源摂動を考慮しないものとする。次の世代においては、1 世代分の源反復効果を考慮することができ、(3.19) 式から

$$\gamma_{PS,j+1,1} = \frac{\gamma_{f,\ell,j,0} \sum_{\ell} n_{f,\ell}}{\sum_{\ell} n_{f,\ell} \gamma_{f,\ell,j,0}} = \frac{\gamma_{f,NPS,\ell,0} \sum_{\ell} n_{f,\ell}}{\sum_{\ell} n_{f,\ell} \gamma_{f,NPS,\ell,0}} \quad (3.23)$$

$$\text{Est} [\Delta k_{PS,j+1,1}] = \frac{1}{N} \sum_{\ell} \gamma_{f,NPS,\ell,1} (\gamma_{PS,j+1,1} - 1) w_{f,\ell} \quad (3.24)$$

で計算する。その次の世代においては、2 世代分の源反復効果を考慮することができ、

$$\gamma_{PS,j+2,2} = \frac{\gamma_{f,\ell,j+1,1} \sum_{\ell} n_{f,\ell}}{\sum_{\ell} n_{f,\ell} \gamma_{f,\ell,j+1,1}} = \frac{\gamma_{f,NPS,\ell,1} \gamma_{PS,j+1,1} \sum_{\ell} n_{f,\ell}}{\sum_{\ell} n_{f,\ell} \gamma_{f,NPS,\ell,1} \gamma_{PS,j+1,1}} \quad (3.25)$$

$$\text{Est} [\Delta k_{PS,j+2,2}] = \frac{1}{N} \sum_{\ell} \gamma_{f,NPS,\ell,2} (\gamma_{PS,j+2,2} - 1) w_{f,\ell} \quad (3.26)$$

で計算する。以降、同様にして計算する。よって、一般的に、 $\gamma_{PS,j,n}$  と  $\text{Est} [\Delta k_{PS,j,n}]$  は、それぞれ、第  $j$  世代において  $n$  世代分の源摂動反復を考慮した源摂動重み係数と源摂動効果である。

図 3.1 は、相関サンプリング法で源摂動効果を評価するためのアルゴリズムを表している。第  $j$  世代の開始時、 $\gamma_{PS,j,n}$  は、第  $j-1$  世代の結果から既に得られている。第  $j$  世代のランダムウォーク過程において、次の世代の源摂動重み係数のために  $\gamma_{f,\ell,j,n}$  をスコアリングし、

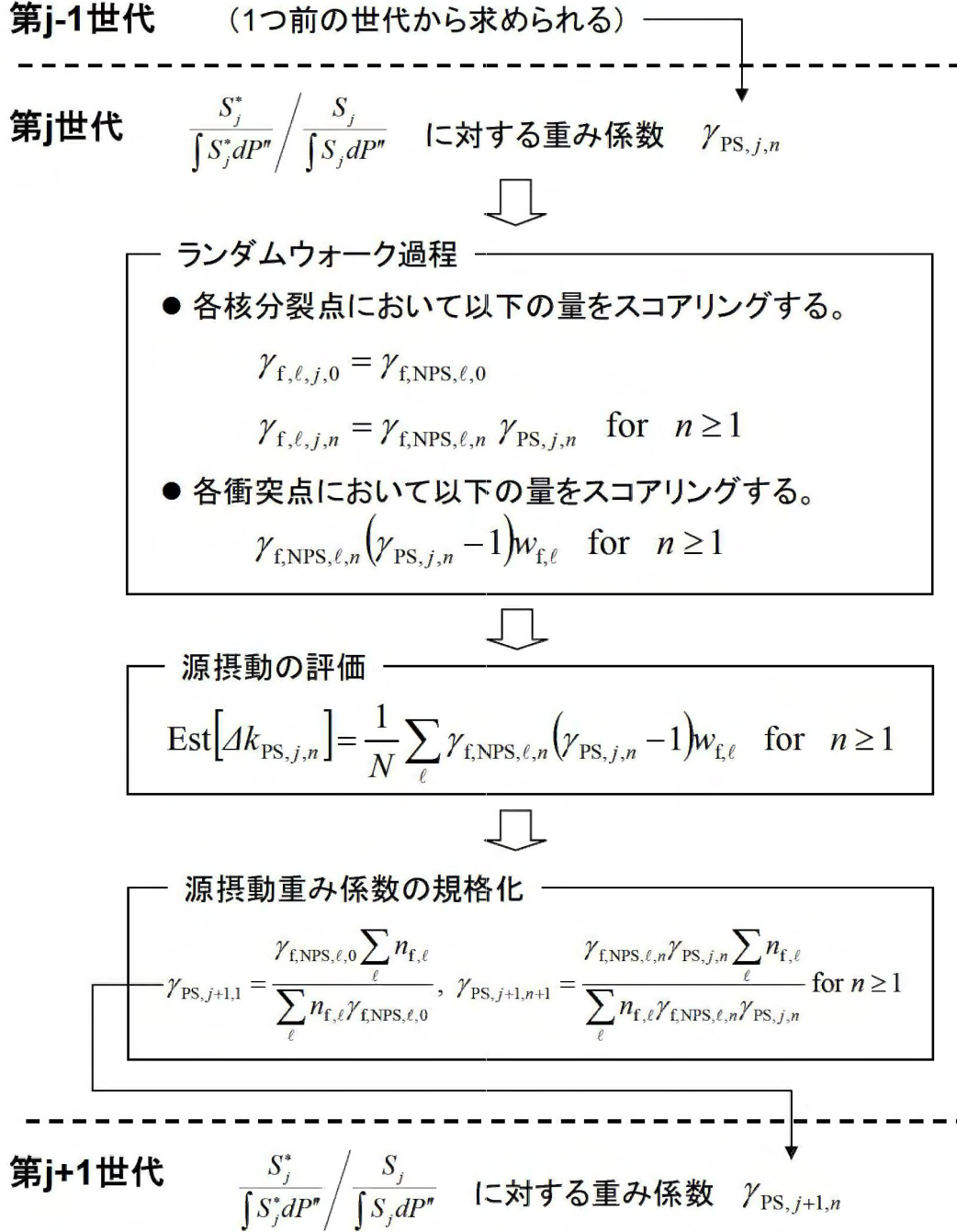


図 3.1: 相関サンプリング法で源摂動効果を評価するためのアルゴリズム

源摂動による実効増倍率の変化量を評価するために  $\gamma_{f,NPS,\ell,n} (\gamma_{PS,j,n} - 1) w_{f,\ell}$  をスコアリングする。すべてのヒストリーに対して、ランダムウォークが終了すると

$$\text{Est} [\Delta k_{PS,j,n}] = \frac{1}{N} \sum_{\ell} \gamma_{f,NPS,\ell,n} (\gamma_{PS,j,n} - 1) w_{f,\ell} \quad (3.27)$$

により、源摂動による実効増倍率の変化量を評価する。また、次の世代の源摂動重み係数を次式によって評価する。

$$\gamma_{PS,j+1,1} = \frac{\gamma_{f,NPS,\ell,0} \sum_{\ell} n_{f,\ell}}{\sum_{\ell} n_{f,\ell} \gamma_{f,NPS,\ell,0}} \quad (3.28)$$

$$\gamma_{PS,j+1,n+1} = \frac{\gamma_{f,NPS,\ell,n} \gamma_{PS,j,n} \sum_{\ell} n_{f,\ell}}{\sum_{\ell} n_{f,\ell} \gamma_{f,NPS,\ell,n} \gamma_{PS,j,n}} \quad \text{for } n \geq 1 \quad (3.29)$$

### 3.2.4 誤差評価

実効増倍率変化量の最終的な評価値は、有効バッチ数について平均値をとることによって求める。即ち、

$$E [\Delta k] = \frac{1}{N_b - N_{\text{skip}}} \sum_{j=N_{\text{skip}}+1}^{N_b} \text{Est} [\Delta k_j] \quad (3.30)$$

である。ここで、 $E[\Delta k]$  は、 $\Delta k$  の平均値を表し、 $N_b$  と  $N_{\text{skip}}$  は、それぞれ、総バッチ数とスキップバッチ数 (統計処理から除く最初のバッチ数) を表している。源摂動を考慮しない  $\Delta k_{NPS}$  も、源摂動効果  $\Delta k_{PS}$  も (3.30) 式から同様にして評価される。

このとき、分散は以下のようにして評価する。

$$\sigma^2 [\Delta k] = \frac{1}{N_b - N_{\text{skip}} - 1} \left( \frac{1}{N_b - N_{\text{skip}}} \sum_{j=N_{\text{skip}}+1}^{N_b} (\text{Est} [\Delta k_j])^2 - E^2 [\text{Est} [\Delta k_j]] \right) \quad (3.31)$$

ここで、 $\sigma[\Delta k]$  は、 $\Delta k$  に対する標準偏差を表す。本研究では、バッチ間 (世代間) の相関は考慮していない。

## 3.3 微分演算子サンプリング法による実効増倍率変化量の評価手法

### 3.3.1 実効増倍率変化量の Taylor 級数表現

摂動を受けるパラメータを  $a$  とする。 $a$  は物質の密度や温度などを表す一般的なパラメータである。第  $j$  世代における実効増倍率  $k_j$  は、一般的に  $a$  の関数であり、求めたい量はこのパラメータが  $\Delta a$  だけ変化したときの実効増倍率の変化量  $\Delta k_j$  である。実効増倍率  $k_j$  を  $a$  に関して Taylor 展開すると、 $\Delta k_j$  は

$$\Delta k_j = \frac{\partial k_j}{\partial a} \Delta a + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 k_j}{\partial a^2} (\Delta a)^2 + \cdots + \frac{1}{n!} \frac{\partial^n k_j}{\partial a^n} (\Delta a)^n + \cdots \quad (3.32)$$



となる。微分演算子サンプリング法ではここに現れる微分係数をモンテカルロ法により評価することで  $\Delta k_j$  を評価する。高次の微分係数まで考慮すると正確に変化量を求めることができるが、高次の微分係数は煩雑な式になる。本節 (3.3 節) では、まず、通常よく行われる、源摂動を考慮しない 2 次までの Taylor 級数項を評価し、これに加えて 1 次の源摂動効果を評価することにより、源摂動効果の重要性を定量的に把握する。高次項を評価する方法については、第 4 章で考える。

### 3.3.2 実効増倍率に対する 1 次の微分係数

ここでは、中性子生成率比で定義される実効増倍率についてのみ考える。中性子バランス比で定義される実効増倍率については、その分母に対して、中性子生成率比で定義される実効増倍率とスコアリングするものが異なるだけで、その分母は分子と同様の形式であり、以下の議論から容易に推察することができる。

既に、2.6.1 項で定式化したように、実効増倍率は (2.143) 式で表され、式変形の見通しをよくするために以下のように表すことにする。

$$k_j = \frac{\sum_{m=1}^{\infty} \int dP_m \cdots \int dP_1 \int d\mathbf{r}_0 F(P_m, \cdots, P_1, \mathbf{r}_0)}{\int dPS_{f,j}(P)} \quad (3.33)$$

$$F(P_m, \cdots, P_1, \mathbf{r}_0) \equiv p_f(P_m) K_s(P_m \leftarrow P_{m-1}) \cdots K_s(P_2 \leftarrow P_1) S_{f,j}(P_1) \quad (3.34)$$

(3.33) 式を  $a$  について微分すると、実効増倍率に対する 1 次の微分係数が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial k_j}{\partial a} &= \frac{\sum_{m=1}^{\infty} \int dP_m \cdots \int dP_1 \int d\mathbf{r}_0 \frac{\partial}{\partial a} F(P_m, \cdots, P_1, \mathbf{r}_0)}{\int dPS_{f,j}(P)} \\ &\quad - \frac{\sum_{m=1}^{\infty} \int dP_m \cdots \int dP_1 \int d\mathbf{r}_0 F(P_m, \cdots, P_1, \mathbf{r}_0) \frac{\partial}{\partial a} \int dPS_{f,j}(P)}{\int dPS_{f,j}(P) \int dPS_{f,j}(P)} \\ &= \frac{\sum_{m=1}^{\infty} \int dP_m \cdots \int dP_1 \int d\mathbf{r}_0 \frac{\partial}{\partial a} F(P_m, \cdots, P_1, \mathbf{r}_0)}{\int dPS_{f,j}(P)} \\ &\quad - k_j \frac{\frac{\partial}{\partial a} \int dPS_{f,j}(P)}{\int dPS_{f,j}(P)} \end{aligned} \quad (3.35)$$

(3.35) 式の右辺第 2 項は、源中性子総数（非アナログモンテカルロ法では、源中性子の総重み）の相対的な変化量を表しているが、モンテカルロ法の源反復において、これは規格化因

子であるから常に一定値として計算する。また、ここで新しく開発する手法では、1回のモンテカルロ計算で、摂動系も非摂動系も計算することを考えているので、源中性子総数は、パラメータ  $a$  に関わらず一定とみなすことができる。即ち、

$$\int dPS_{f,j}(P; a) = N = \text{const.} \quad (3.36)$$

である。従って、(3.35) 式の右辺第2項は0となり、(3.35) 式は

$$\frac{\partial k_j}{\partial a} = \frac{\sum_{m=1}^{\infty} \int dP_m \cdots \int dP_1 \int d\mathbf{r}_0 \frac{\partial}{\partial a} F(P_m, \cdots, P_1, \mathbf{r}_0)}{\int dPS_{f,j}(P)} \quad (3.37)$$

$$= \frac{1}{\int dPS_{f,j}(P)} \sum_{m=1}^{\infty} \int dP_m \cdots \int dP_1 \int d\mathbf{r}_0 W_f^{(1)}(P_m, \cdots, P_1, \mathbf{r}_0) \times F(P_m, \cdots, P_1, \mathbf{r}_0) \quad (3.38)$$

と表すことができる。ここで、

$$W_f^{(1)}(P_m, \cdots, P_1, \mathbf{r}_0) \equiv \frac{1}{F} \frac{\partial}{\partial a} F(P_m, \cdots, P_1, \mathbf{r}_0) \quad (3.39)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{p_f(P_m)} \frac{\partial}{\partial a} p_f(P_m) + \frac{1}{K_s(P_m \leftarrow P_{m-1})} \frac{\partial}{\partial a} K_s(P_m \leftarrow P_{m-1}) + \cdots \\ &+ \frac{1}{K_s(P_2 \leftarrow P_1)} \frac{\partial}{\partial a} K_s(P_2 \leftarrow P_1) + \frac{1}{T(P_1 \leftarrow \mathbf{r}_0)} \frac{\partial}{\partial a} T(P_1 \leftarrow \mathbf{r}_0) \\ &+ \frac{1}{S_{f,j}(\mathbf{r}_0, E_1, \boldsymbol{\Omega}_1)} \frac{\partial}{\partial a} S_{f,j}(\mathbf{r}_0, E_1, \boldsymbol{\Omega}_1) \end{aligned} \quad (3.40)$$

と定義した。(3.3) 式から (3.5) 式を導出したのと同様にして、(2.171) 式から (2.179) 式に至る導出過程において、 $p_f(P_m)$  を  $W_f^{(1)}(P_m, \cdots, P_1, \mathbf{r}_0) p_f(P_m)$  とみなすと、(3.38) 式をアナログモンテカルロ法によるタリースコアリング形式に変形することができる。即ち、

$$\begin{aligned} \frac{\partial k_j}{\partial a} &= \frac{1}{\int dPS_{f,j}(P)} \sum_{m=1}^{\infty} \int dP_m \cdots \int dP_1 \int d\mathbf{r}_0 \\ &\times \left[ \sum_{\ell=1}^m W_f^{(1)}(P_\ell, \cdots, P_1, \mathbf{r}_0) p_f(P_\ell) \right] H(P_m, \cdots, P_1, \mathbf{r}_0) \end{aligned} \quad (3.41)$$

となる。 $H(P_m, \cdots, P_1, \mathbf{r}_0)$  は、既に (2.181) 式で定義されており、

$$\begin{aligned} H(P_m, P_{m-1}, \cdots, P_1, \mathbf{r}_0) &= \alpha(P_m) K_s(P_m \leftarrow P_{m-1}) \cdots \\ &K_s(P_2 \leftarrow P_1) T(\mathbf{r}_1 \leftarrow \mathbf{r}_0, E_1, \boldsymbol{\Omega}_1) S_{f,j}(\mathbf{r}_0, E_1, \boldsymbol{\Omega}_1) \end{aligned} \quad (3.42)$$

で、中性子のヒストリーを表している。ここでは、源摂動が分かるように、1回衝突中性子源を輸送カーネルと中性子源に陽に分けて表現している。更に、(2.183) 式から (2.190) 式に至る導出過程と同様にして、(3.42) 式を非アナログモンテカルロ法によるタリースコアリン

グ形式に変形すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial k_j}{\partial a} = & \frac{1}{\int dPS_{f,j}(P)} \sum_{m=1}^{\infty} \int dP_m \cdots \int dP_1 \int d\mathbf{r}_0 \\ & \times \left[ \sum_{\ell=1}^m W_f^{(1)}(P_\ell, \cdots, P_1, \mathbf{r}_0) W_f(P_\ell, \cdots, P_1, \mathbf{r}_0) \right] \tilde{H}(P_\ell, \cdots, P_1, \mathbf{r}_0) \end{aligned} \quad (3.43)$$

となる。(3.43) 式は、すべての衝突点において  $W_f^{(1)} W_f$  をスコアリングすることにより実効増倍率の 1 次微分係数を評価することができることを示している。

相関サンプリング法の場合と同様にして、(3.43) 式は源摂動を含まない項と源摂動のみの項に分割することができる。

$$\frac{\partial k_j}{\partial a} = \frac{\partial k_{\text{NPS},j}}{\partial a} + \frac{\partial k_{\text{PS},j}}{\partial a} \quad (3.44)$$

$\partial k_{\text{NPS},j}/\partial a$  は、源摂動を含まない項を表しており、以下のように定義される。

$$\begin{aligned} \frac{\partial k_{\text{NPS},j}}{\partial a} = & \frac{1}{\int dPS_{f,j}(P)} \sum_{m=1}^{\infty} \int dP_m \cdots \int dP_1 \int d\mathbf{r}_0 \\ & \times \left[ \sum_{\ell=1}^m W_{f,\text{NPS}}^{(1)}(P_\ell, \cdots, P_1, \mathbf{r}_0) W_f(P_\ell, \cdots, P_1, \mathbf{r}_0) \right] \tilde{H}(P_\ell, \cdots, P_1, \mathbf{r}_0) \end{aligned} \quad (3.45)$$

ここで、

$$\begin{aligned} W_{f,\text{NPS}}^{(1)} = & \frac{1}{p_f(P_\ell)} \frac{\partial}{\partial a} p_f(P_\ell) + \frac{1}{K_s(P_\ell \leftarrow P_{\ell-1})} \frac{\partial}{\partial a} K_s(P_\ell \leftarrow P_{\ell-1}) + \cdots \\ & + \frac{1}{K_s(P_2 \leftarrow P_1)} \frac{\partial}{\partial a} K_s(P_2 \leftarrow P_1) + \frac{1}{T(P_1 \leftarrow \mathbf{r}_0)} \frac{\partial}{\partial a} T(P_1 \leftarrow \mathbf{r}_0) \end{aligned} \quad (3.46)$$

である。一方、 $\partial k_{\text{PS},j}/\partial a$  は、源摂動のみを含む項 (源摂動効果) を表しており、以下のように定義される。

$$\begin{aligned} \frac{\partial k_{\text{PS},j}}{\partial a} = & \frac{1}{\int dPS_{f,j}(P)} \sum_{m=1}^{\infty} \int dP_m \cdots \int dP_1 \int d\mathbf{r}_0 \\ & \times \left[ \sum_{\ell=1}^m W_{\text{PS},j}^{(1)}(\mathbf{r}_0, E_1, \boldsymbol{\Omega}_1) W_f(P_\ell, \cdots, P_1, \mathbf{r}_0) \right] \tilde{H}(P_\ell, \cdots, P_1, \mathbf{r}_0) \end{aligned} \quad (3.47)$$

ここで、

$$W_{\text{PS},j}^{(1)} = \frac{1}{S_{f,j}(\mathbf{r}_0, E_1, \boldsymbol{\Omega}_1)} \frac{\partial}{\partial a} S_{f,j}(\mathbf{r}_0, E_1, \boldsymbol{\Omega}_1) \quad (3.48)$$

である。実効増倍率を評価する (2.190) 式と (3.46) 式を比べてみると、重み係数  $W_{f,\text{NPS}}^{(1)}$  が異なっているだけである。従って、第  $j$  世代における、源摂動を含まない実効増倍率の 1 次微分係数は、

$$\text{Est} \left[ \frac{\partial k_{\text{NPS},j}}{\partial a} \right] = \frac{1}{N} \sum_{\ell} w_{f,\text{NPS},\ell}^{(1)} w_{f,\ell} \quad (3.49)$$



として評価することができる。ここで、 $w_{f,NPS,\ell}^{(1)}$  は、 $W_{f,NPS}^{(1)}$  のスコアリング値である。また、源摂動効果については、

$$\text{Est} \left[ \frac{\partial k_{PS,j}}{\partial a} \right] = \frac{1}{N} \sum_{\ell} w_{PS,j}^{(1)} w_{f,\ell} \quad (3.50)$$

により評価することができる。ここで、 $w_{PS,j}^{(1)}$  は、 $W_{PS,j}^{(1)}$  のスコアリング値である。 $w_{f,NPS,\ell}^{(1)}$  と  $w_{PS,j}^{(1)}$  について、具体的にどのような量をスコアリングすればよいのかについては、以降の項で詳しく述べる。

### 3.3.3 1次微分係数に対するスコアリング

相関サンプリング法では、摂動系に対しても非摂動系と同様に中性子を追跡 (トラッキング) していけばよいので、どのような量をスコアリングすればよいのか理解しやすい。しかしながら、微分演算子サンプリング法では、これまで見てきたように、スコアリングすべき量は、遷移カーネルの微分項で表されるので、具体的にどのような量をスコアリングすればよいのか明確ではない。本項では、微分演算子サンプリング法で1次微分係数を評価するための具体的なスコアリング量について考察する。

実効増倍率の1次微分係数を評価するための重み係数は、(3.40) 式で示されている。この項の中で、散乱に関する遷移カーネルは、(2.130) 式を  $a$  に関して微分することにより

$$\begin{aligned} \frac{1}{K_s(P \leftarrow P')} \frac{\partial}{\partial a} K_s(P \leftarrow P') = \\ \frac{1}{T} \frac{\partial}{\partial a} T(\mathbf{r} \leftarrow \mathbf{r}', E, \boldsymbol{\Omega}) + \frac{1}{C_s} \frac{\partial}{\partial a} C_s(\mathbf{r}', E \leftarrow E', \boldsymbol{\Omega} \leftarrow \boldsymbol{\Omega}') \end{aligned} \quad (3.51)$$

となり、輸送カーネルと散乱カーネルの微分項に分解することができる。よって、重み係数の評価に必要な量は、 $p_f$ 、輸送カーネル、散乱カーネル、核分裂源の微分項となる。ここでは、 $p_f$ 、輸送カーネル、散乱カーネルの微分項について調べることにし、核分裂源の微分項は次項で考える。

$p_f$  は (2.138) 式で定義され、この式を  $a$  について微分すると

$$\frac{1}{p_f} \frac{\partial}{\partial a} p_f(\mathbf{r}, E) = \frac{1}{\nu \Sigma_f} \frac{\partial}{\partial a} \nu \Sigma_f(\mathbf{r}, E) - \frac{1}{\Sigma_t} \frac{\partial}{\partial a} \Sigma_t(\mathbf{r}, E) \quad (3.52)$$

が得られる。

輸送カーネルについて考察する。最も簡単な例として、粒子がある均質な摂動領域に入り、飛行距離  $s$  だけ移動し、そこで衝突を起こしたとする。このときの輸送カーネルは

$$T(\mathbf{r} \leftarrow \mathbf{r}', E, \boldsymbol{\Omega}) = \Sigma_t \exp(-\Sigma_t s) \quad (3.53)$$

であり、これを  $a$  で微分すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a} T(\mathbf{r} \leftarrow \mathbf{r}', E, \boldsymbol{\Omega}) &= \frac{\partial \Sigma_t}{\partial a} \exp(-\Sigma_t s) - \Sigma_t s \exp(-\Sigma_t s) \frac{\partial \Sigma_t}{\partial a} \\ &= \left[ \frac{1}{\Sigma_t} \frac{\partial \Sigma_t}{\partial a} - s \frac{\partial \Sigma_t}{\partial a} \right] \Sigma_t \exp(-\Sigma_t s) \end{aligned} \quad (3.54)$$

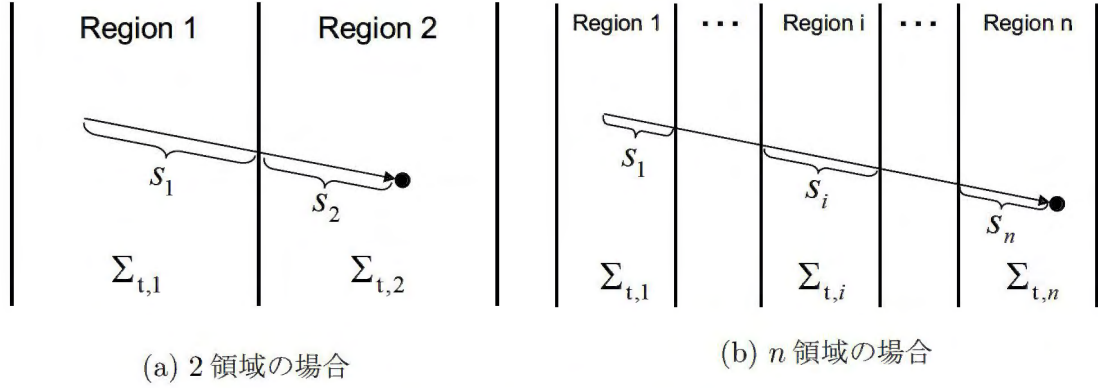


図 3.2: 中性子が物質境界を横切って衝突する場合

となる。よって、飛行による重み係数は

$$\frac{1}{T} \frac{\partial}{\partial a} T(\mathbf{r} \leftarrow \mathbf{r}', E, \boldsymbol{\Omega}) = \frac{1}{\Sigma_t} \frac{\partial \Sigma_t}{\partial a} - s \frac{\partial \Sigma_t}{\partial a} \quad (3.55)$$

となる。次に2領域の場合について考える。図 3.2 に示すように、第1領域で距離  $s_1$  を飛行し、第2領域で距離  $s_2$  飛行した後、衝突するものとする。このとき遷移カーネルは

$$T = \Sigma_{t,2} \exp(-\Sigma_{t,2}s_2 - \Sigma_{t,1}s_1) \quad (3.56)$$

であり、これを  $a$  について微分すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial a} &= \frac{\partial \Sigma_{t,2}}{\partial a} \exp(-\Sigma_{t,2}s_2 - \Sigma_{t,1}s_1) \\ &\quad - \Sigma_{t,2} \exp(-\Sigma_{t,2}s_2 - \Sigma_{t,1}s_1) \left( s_2 \frac{\partial \Sigma_{t,2}}{\partial a} + s_1 \frac{\partial \Sigma_{t,1}}{\partial a} \right) \end{aligned} \quad (3.57)$$

となり、重み係数は

$$\frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial a} = \frac{1}{\Sigma_{t,2}} \frac{\partial \Sigma_{t,2}}{\partial a} - \left( s_2 \frac{\partial \Sigma_{t,2}}{\partial a} + s_1 \frac{\partial \Sigma_{t,1}}{\partial a} \right) \quad (3.58)$$

となる。一般に  $n$  領域の場合、輸送カーネルは

$$T = \Sigma_{t,n} \exp \left( - \sum_{i=1}^n \Sigma_{t,i} s_i \right) \quad (3.59)$$

となり、重み係数は

$$\frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial a} = \frac{1}{\Sigma_{t,n}} \frac{\partial \Sigma_{t,n}}{\partial a} - \sum_{i=1}^n \left( s_i \frac{\partial \Sigma_{t,i}}{\partial a} \right) \quad (3.60)$$

である。以上より、輸送カーネルに対する重み係数は

$$\begin{aligned} \text{ある領域で距離 } s \text{ 飛行したとき} &\Rightarrow -s \frac{\partial \Sigma_t}{\partial a} \\ \text{衝突したとき} &\Rightarrow \frac{1}{\Sigma_t} \frac{\partial \Sigma_t}{\partial a} \end{aligned}$$

をスコアリングすればよいことが分かる。

散乱カーネルの重み係数について考察する。衝突核種と散乱タイプを選択する必要のない多群モンテカルロ法の場合、散乱カーネルは

$$C_s(\mathbf{r}, E \leftarrow E', \boldsymbol{\Omega} \leftarrow \boldsymbol{\Omega}') = \frac{\Sigma_s(\mathbf{r}, E \leftarrow E', \boldsymbol{\Omega} \leftarrow \boldsymbol{\Omega}')}{\Sigma_t(\mathbf{r}, E')} \quad (3.61)$$

であり、重み係数は

$$\frac{1}{C_s} \frac{\partial}{\partial a} C_s(\mathbf{r}, E \leftarrow E', \boldsymbol{\Omega} \leftarrow \boldsymbol{\Omega}') = \frac{1}{\Sigma_s} \frac{\partial \Sigma_s}{\partial a} - \frac{1}{\Sigma_t} \frac{\partial \Sigma_t}{\partial a} \quad (3.62)$$

となる。しかし、衝突核種と散乱タイプを選択する必要がある連続エネルギーモンテカルロ法の場合、確率密度関数を少し詳細に表現する必要がある。実効増倍率の表現式である (2.182) 式から分かるように、確率密度関数は (2.181) 式で定義される  $H$  である。これは、散乱カーネルを含み、(2.90) 式で定義される。 (2.90) 式を

$$C_s(\mathbf{r}, E \leftarrow E', \boldsymbol{\Omega} \leftarrow \boldsymbol{\Omega}') = \sum_k \sum_x C_{s,x}^k(\mathbf{r}, E \leftarrow E', \boldsymbol{\Omega} \leftarrow \boldsymbol{\Omega}') \quad (3.63)$$

$$C_{s,x}^k(\mathbf{r}, E \leftarrow E', \boldsymbol{\Omega} \leftarrow \boldsymbol{\Omega}') = \frac{\Sigma_t^k(\mathbf{r}, E')}{\Sigma_t(\mathbf{r}, E')} \frac{\sigma_s^k(E')}{\sigma_t^k(E')} \frac{\sigma_x^k(E')}{\sigma_s^k(E')} \nu_x^k f_x^k(E \leftarrow E', \boldsymbol{\Omega} \leftarrow \boldsymbol{\Omega}') \quad (3.64)$$

と表し、 $C_{s,x}^k$  を用いて実効増倍率を表現すると

$$k_j = \frac{\sum_{m=1}^{\infty} \int dP_m \sum_{k_m, x_m} \cdots \int dP_1 \sum_{k_1, x_1} \sum_{\ell=1}^m p_f(P_\ell) H(P_m, k_m, x_m, \cdots, P_1, k_1, x_1)}{\int dP S_{f,j}(P)} \quad (3.65)$$

$$\begin{aligned} H(P_m, k_m, x_m, \cdots, P_1, k_1, x_1) = \\ \alpha(P_m) T(\mathbf{r}_m \leftarrow \mathbf{r}_{m-1}, E_m, \boldsymbol{\Omega}_m) C_{s,x_m}^{k_m}(\mathbf{r}_{m-1}, E_m \leftarrow E_{m-1}, \boldsymbol{\Omega}_m \leftarrow \boldsymbol{\Omega}_{m-1}) \cdots \\ T(\mathbf{r}_2 \leftarrow \mathbf{r}_1, E_2, \boldsymbol{\Omega}_2) C_{s,x_1}^{k_1}(\mathbf{r}_1, E_2 \leftarrow E_1, \boldsymbol{\Omega}_2 \leftarrow \boldsymbol{\Omega}_1) S_{f,j}(P_1) \end{aligned} \quad (3.66)$$

と表すことができる。ここで、インデックス  $k_m$  と  $x_m$  は、それぞれ、 $m$  回目の衝突における衝突核種と散乱タイプである。よって、散乱カーネルに対する重み係数は、(3.64) 式に対する相対微分量を考えればよい。即ち、

$$\begin{aligned} \frac{1}{C_{s,x}^k} \frac{\partial}{\partial a} C_{s,x}^k(\mathbf{r}, E \leftarrow E', \boldsymbol{\Omega} \leftarrow \boldsymbol{\Omega}') \\ = \frac{1}{\Sigma_t^k} \frac{\partial \Sigma_t^k}{\partial a} - \frac{1}{\Sigma_t} \frac{\partial \Sigma_t}{\partial a} - \frac{1}{\sigma_t^k} \frac{\partial \sigma_t^k}{\partial a} + \frac{1}{\sigma_x^k} \frac{\partial \sigma_x^k}{\partial a} + \frac{1}{\nu_x^k f_x^k} \frac{\partial (\nu_x^k f_x^k)}{\partial a} \end{aligned} \quad (3.67)$$

$$= \frac{1}{N^k} \frac{\partial N^k}{\partial a} - \frac{1}{\Sigma_t} \frac{\partial \Sigma_t}{\partial a} + \frac{1}{\sigma_x^k} \frac{\partial \sigma_x^k}{\partial a} + \frac{1}{\nu_x^k f_x^k} \frac{\partial (\nu_x^k f_x^k)}{\partial a} \quad (3.68)$$

$$= \frac{1}{\Sigma_x^k} \frac{\partial \Sigma_x^k}{\partial a} + \frac{1}{\nu_x^k f_x^k} \frac{\partial (\nu_x^k f_x^k)}{\partial a} - \frac{1}{\Sigma_t} \frac{\partial \Sigma_t}{\partial a} \quad (3.69)$$

ここで、

$$\frac{1}{\Sigma_t^k} \frac{\partial \Sigma_t^k}{\partial a} = \frac{1}{\sigma_t^k} \frac{\partial \sigma_t^k}{\partial a} + \frac{1}{N^k} \frac{\partial N^k}{\partial a} \quad (3.70)$$



を用いた。 $N^k$  は核種  $k$  に対する原子数密度である。衝突解析により、散乱核種  $k = \kappa$ 、散乱タイプ  $x = \eta$  が決まると

$$\begin{aligned} & \frac{1}{C_{s,\eta}^\kappa} \frac{\partial}{\partial a} C_{s,\eta}^\kappa(\mathbf{r}, E \leftarrow E', \boldsymbol{\Omega} \leftarrow \boldsymbol{\Omega}') \\ &= \frac{1}{\Sigma_\eta^\kappa} \frac{\partial \Sigma_\eta^\kappa}{\partial a} + \frac{1}{\nu_\eta^\kappa f_\eta^\kappa} \frac{\partial(\nu_\eta^\kappa f_\eta^\kappa)}{\partial a} - \frac{1}{\Sigma_t} \frac{\partial \Sigma_t}{\partial a} \end{aligned} \quad (3.71)$$

となり、散乱カーネルに対する重み係数は、(3.71) 式から求められる。

遷移カーネルに対する重み係数は、輸送カーネルと散乱カーネルの重み係数をまとめると、断面積が均質なある領域において距離  $s$  飛行したとき

$$-s \frac{\partial \Sigma_t}{\partial a} = -s \sum_k \left[ \frac{\partial \sigma_t^k}{\partial a} N^k + \sigma_t^k \frac{\partial N^k}{\partial a} \right] = -s \sum_k \left[ \frac{1}{\sigma_t^k} \frac{\partial \sigma_t^k}{\partial a} + \frac{1}{N^k} \frac{\partial N^k}{\partial a} \right] \Sigma_t^k \quad (3.72)$$

をスコアリングし、核種  $\kappa$  と衝突し、散乱タイプ  $\eta$  で散乱したとき

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Sigma_\eta^\kappa} \frac{\partial \Sigma_\eta^\kappa}{\partial a} + \frac{1}{\nu_\eta^\kappa f_\eta^\kappa} \frac{\partial(\nu_\eta^\kappa f_\eta^\kappa)}{\partial a} \\ &= \frac{1}{\sigma_\eta^\kappa} \frac{\partial \sigma_\eta^\kappa}{\partial a} + \frac{1}{N^\kappa} \frac{\partial N^\kappa}{\partial a} + \frac{1}{\nu_\eta^\kappa f_\eta^\kappa} \frac{\partial(\nu_\eta^\kappa f_\eta^\kappa)}{\partial a} \end{aligned} \quad (3.73)$$

となる。摂動パラメータが密度や核種数密度の場合は、 $1/N^k \cdot \partial N^k / \partial a$  が有効になり、摂動パラメータが微視的断面積の場合は、 $1/\sigma_t^k \cdot \partial \sigma_t^k / \partial a$  が有効になるが、一般的に、両者の場合をまとめると、巨視的断面積の相対的な微分量をスコアリングすればよいことになる。摂動パラメータが、multiplicity( $\nu$ ) や角度分布の場合は、 $1/(\nu_\eta^\kappa f_\eta^\kappa) \cdot \partial \nu_\eta^\kappa f_\eta^\kappa / \partial a$  が有効になる。

### 3.3.4 核分裂源の1次微分係数に対するスコアリング

本項では、源摂動の1次微分係数である  $1/S_{f,j} \cdot \partial S_{f,j} / \partial a$  のスコアリング値  $w_{\text{PS},j}^{(1)}$  をどのようにしてスコアリングするかについて考察する。(2.194) 式を  $a$  に関して微分すると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a} S_{f,j+1}(P) &= \frac{1}{k_j} \int dP' \frac{\partial}{\partial a} (\mathcal{K}_F(P \leftarrow P') S_{f,j}(P')) \\ &\quad - \frac{1}{k_j^2} \frac{\partial k_j}{\partial a} \int dP' \mathcal{K}_F(P \leftarrow P') S_{f,j}(P') \end{aligned} \quad (3.74)$$

となり、(2.109) 式で表される  $k_j$  の表現式とこれを微分した  $\partial k_j / \partial a$  の表現式

$$\frac{\partial k_j}{\partial a} = \frac{\int dP \int dP' \frac{\partial}{\partial a} \mathcal{K}_F(P \leftarrow P') S_{f,j}(P')}{\int dP S_{f,j}(P)} \quad (3.75)$$

((3.75) 式は、(3.37) 式に (2.141) 式を用いることによっても求めることができる。) を用いると、(3.74) 式は

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a} S_{f,j+1}(P) &= \frac{\int dP S_{f,j}(P)}{\int dP \int dP' \mathcal{K}_F(P \leftarrow P') S_{f,j}(P')} \left( \int dP' \frac{\partial}{\partial a} (\mathcal{K}_F(P \leftarrow P') S_{f,j}(P')) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\int dP' \mathcal{K}_F(P \leftarrow P') S_{f,j}(P')}{\int dP \int dP' \mathcal{K}_F(P \leftarrow P') S_{f,j}(P')} \int dP \int dP' \frac{\partial}{\partial a} (\mathcal{K}_F(P \leftarrow P') S_{f,j}(P')) \right) \end{aligned} \quad (3.76)$$

と表すことができる。第  $j$  世代のヒストリーの追跡がすべて終了すると、(3.76) 式は以下のように評価することができる。

$$\text{Est}_N \left[ \frac{\partial}{\partial a} S_{f,j+1}(P) \right] = \frac{N}{\sum_{\ell} w_{f,\ell}} \left( w_{f,\ell}^{(1)} w_{f,\ell} - \frac{w_{f,\ell}}{\sum_{\ell} w_{f,\ell}} \sum_{\ell} w_{f,\ell}^{(1)} w_{f,\ell} \right) \quad (3.77)$$

ここで、 $w_{f,\ell}^{(1)}$  は、(3.40) 式で定義される  $W_f^{(1)}$  のスコアリング値である。 $w_{f,\ell}$  は、衝突点  $\ell$  における核分裂中性子生成率 (実効増倍率) のスコアリング値であり、これに重み係数  $w_{f,\ell}^{(1)}$  をかけることにより、実効増倍率の 1 次微分係数のスコアリング値となる。(3.40) 式の右辺最終項の評価方法については、3.3.5 項で述べる。

2.6.5 項で見たように、 $w_{f,\ell}$  を  $n_{f,\ell} \bar{w}_f$  に置き換えると、

$$\begin{aligned} \text{Est}_N \left[ \frac{\partial}{\partial a} S_{f,j+1}(P) \right] &= \frac{N}{\sum_{\ell} n_{f,\ell} \bar{w}_f} \left( w_{f,\ell}^{(1)} n_{f,\ell} \bar{w}_f - \frac{n_{f,\ell} \bar{w}_f}{\sum_{\ell} n_{f,\ell} \bar{w}_f} \sum_{\ell} w_{f,\ell}^{(1)} n_{f,\ell} \bar{w}_f \right) \\ &= \frac{N n_{f,\ell}}{\sum_{\ell} n_{f,\ell}} \left( w_{f,\ell}^{(1)} - \frac{\sum_{\ell} n_{f,\ell} w_{f,\ell}^{(1)}}{\sum_{\ell} n_{f,\ell}} \right) \end{aligned} \quad (3.78)$$

と表すことができる。また、(2.203) 式より

$$\text{Est}_N [S_{f,j+1}(P)] = \frac{n_{f,\ell}}{\sum_{\ell} n_{f,\ell}} N \quad (3.79)$$

であるから、

$$w_{\text{PS},j+1}^{(1)} = \text{Est}_N \left[ \frac{1}{S_{f,j+1}(P)} \frac{\partial}{\partial a} S_{f,j+1}(P) \right] = w_{f,\ell}^{(1)} - \frac{\sum_{\ell} n_{f,\ell} w_{f,\ell}^{(1)}}{\sum_{\ell} n_{f,\ell}} \quad (3.80)$$

となる。陽には示していないが、(3.80) 式の右辺の値はすべて第  $j$  世代のランダムウォークの結果から得られるものである。従って、微分演算子サンプリング法に対する源摂動微分量の重み係数  $w_{\text{PS},j+1}^{(1)}$  は、第  $j$  世代の源摂動微分量の重み係数  $w_{f,\ell}^{(1)}$  を (3.80) 式で規格化することによって得られる。

### 3.3.5 アルゴリズム

本項では、微分演算子サンプリング法における 1 次の源摂動効果  $\partial k_{\text{PS},j} / \partial a$  を評価するためのアルゴリズムについて考察する。前項で見たように、源摂動の 1 次微分量を表す  $w_{\text{PS},j+1}^{(1)}$  は、一つ前の世代で得られた  $w_{f,\ell}^{(1)}$  を規格化することにより得られる。 $w_{f,\ell}^{(1)}$  は、(3.40) 式、(3.46) 式、(3.48) 式の定義から分かるように、

$$w_{f,\ell}^{(1)} = w_{f,\text{NPS},\ell}^{(1)} + w_{\text{PS},j}^{(1)} \quad (3.81)$$

であり、源摂動の1次微分量を表す重み係数は、(3.80)式と(3.81)式を用いて、世代間の反復から計算しなければならない。3.2.3項で指摘したように、このまま反復させると  $\partial k_{\text{PS},j}/\partial a$  の分散は反復させる世代の長さに依存し、各世代において分散評価のサンプル数が異なることになる。相関サンプリング法における源摂動効果評価のアルゴリズムと同様にして、固有値計算の通常の反復世代とは別に、源摂動微分量の重み係数の反復世代の概念を導入し、以下のようにして源摂動効果を計算する。最初の源摂動反復世代(第0世代)については、

$$w_{\text{PS},j,0}^{(1)} = 0 \quad (3.82)$$

$$\text{Est} \left[ \frac{\partial k_{\text{PS},j,0}}{\partial a} \right] = 0 \quad (3.83)$$

とし、源摂動を考慮しないものとする。また、同時に次の世代の源摂動評価のために、(3.81)式から

$$w_{f,\ell,j,0}^{(1)} = w_{f,\text{NPS},\ell,j,0}^{(1)} \quad (3.84)$$

を保存しておく。ここで、 $w_{f,\ell,j,0}^{(1)}$  と  $w_{f,\text{NPS},\ell,j,0}^{(1)}$  は、それぞれ、 $w_{f,\ell}^{(1)}$  と  $w_{f,\text{NPS},\ell}^{(1)}$  であり、源反復世代と源摂動反復世代のインデックスを陽に表しただけである。次の世代については、1世代分の源摂動反復効果を考慮することができ、

$$w_{\text{PS},j+1,1}^{(1)} = w_{f,\ell,j,0}^{(1)} - \frac{\sum_{\ell} n_{f,\ell,j,0} w_{f,\ell,j,0}^{(1)}}{\sum_{\ell} n_{f,\ell,j,0}} \quad (3.85)$$

$$\text{Est} \left[ \frac{\partial k_{\text{PS},j+1,1}}{\partial a} \right] = \frac{1}{N} \sum_{\ell} w_{\text{PS},j+1,1}^{(1)} w_{f,\ell,j+1,1} \quad (3.86)$$

により、源摂動効果を計算する。同時に、次の世代の源摂動評価のために

$$w_{f,\ell,j+1,1}^{(1)} = w_{f,\text{NPS},\ell,j+1,1}^{(1)} + w_{\text{PS},j+1,1}^{(1)} \quad (3.87)$$

を保存する。その次の世代においては、2世代分の源摂動反復効果を考慮することができ、

$$w_{\text{PS},j+2,2}^{(1)} = w_{f,\ell,j+1,1}^{(1)} - \frac{\sum_{\ell} n_{f,\ell,j+1,1} w_{f,\ell,j+1,1}^{(1)}}{\sum_{\ell} n_{f,\ell,j+1,1}} \quad (3.88)$$

$$\text{Est} \left[ \frac{\partial k_{\text{PS},j+2,2}}{\partial a} \right] = \frac{1}{N} \sum_{\ell} w_{\text{PS},j+2,2}^{(1)} w_{f,\ell,j+2,2} \quad (3.89)$$

により、源摂動効果を計算する。同時に、次の世代の源摂動評価のために

$$w_{f,\ell,j+2,2}^{(1)} = w_{f,\text{NPS},\ell,j+2,2}^{(1)} + w_{\text{PS},j+2,2}^{(1)} \quad (3.90)$$

を保存する。以降、同様にして計算する。よって、一般的に、 $w_{\text{PS},j,n}^{(1)}$  と  $\text{Est} [\partial k_{\text{PS},j+2,2}/\partial a]$  は、それぞれ、第  $j$  世代において  $n$  世代分の源摂動反復を考慮した源摂動微分量の重み係数と源摂動効果である。



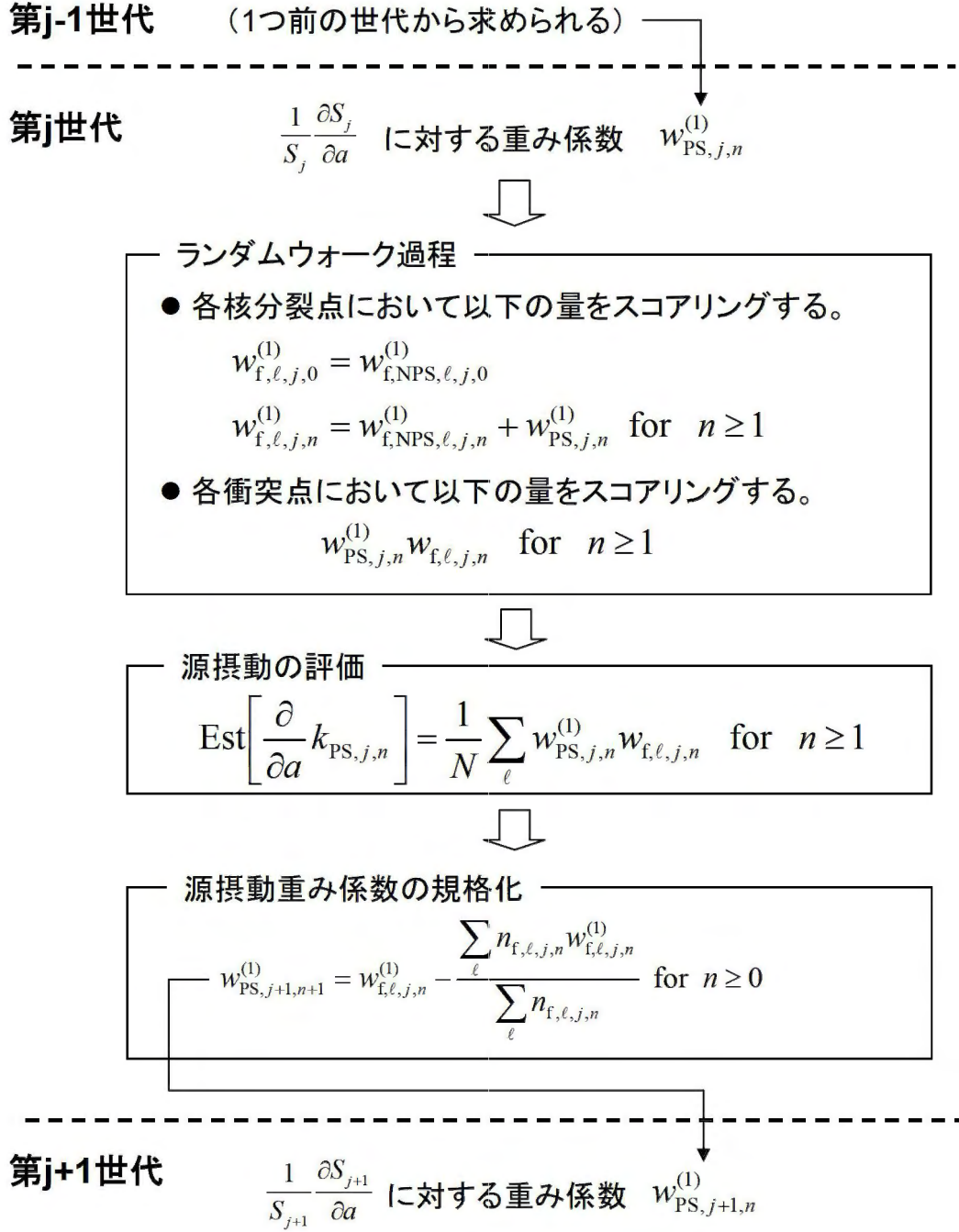


図 3.3: 微分演算子サンプリング法で源摂動効果を評価するためのアルゴリズム

図 3.3 は、微分演算子サンプリング法で源摂動効果を評価するためのアルゴリズムを表している。第  $j$  世代の開始時、 $w_{\text{PS},j,n}^{(1)}$  は、第  $j-1$  世代のランダムウォークの結果から既に得られている。第  $j$  世代のランダムウォーク過程において、次の世代の源摂動微分量の重み係数を計算するために  $w_{f,\ell,j,n}^{(1)}$  をスコアリングし、源摂動による実効増倍率の微分係数を評価するために  $w_{\text{PS},j,n}^{(1)} w_{f,\ell,j,n}$  をスコアリングする。すべてのヒストリーに対して、ランダムウォークが終了すると

$$\text{Est} \left[ \frac{\partial k_{\text{PS},j,n}}{\partial a} \right] = \frac{1}{N} \sum_{\ell} w_{\text{PS},j,n}^{(1)} w_{f,\ell,j,n} \quad (3.91)$$

により、源摂動による実効増倍率の微分係数を評価する。また、次の世代の源摂動微分量の重み係数を次式によって評価する。

$$w_{\text{PS},j+1,n+1}^{(1)} = w_{f,\ell,j,n}^{(1)} - \frac{\sum_{\ell} n_{f,\ell,j,n} w_{f,\ell,j,n}^{(1)}}{\sum_{\ell} n_{f,\ell,j,n}} \quad \text{for } n \geq 0 \quad (3.92)$$

### 3.3.6 実効増倍率に対する 2 次の微分係数

本項では、実効増倍率に対する 2 次の微分係数についての定式化を考える。実効増倍率に対する 2 次の微分係数は、(3.37) 式を  $a$  で微分することによって得られる。即ち、

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 k_j}{\partial a^2} &= \frac{1}{\int dP S_{f,j}(P)} \sum_{m=1}^{\infty} \int dP_m \cdots \int dP_1 \int d\mathbf{r}_0 W_f^{(2)}(P_m, \cdots, P_1, \mathbf{r}_0) \\ &\quad \times F(P_m, \cdots, P_1, \mathbf{r}_0) \end{aligned} \quad (3.93)$$

$$\begin{aligned} W_f^{(2)}(P_m, \cdots, P_1, \mathbf{r}_0) &= \\ &= \frac{\partial}{\partial a} W_f^{(1)}(P_m, \cdots, P_1, \mathbf{r}_0) + \left( W_f^{(1)}(P_m, \cdots, P_1, \mathbf{r}_0) \right)^2 \end{aligned} \quad (3.94)$$

である。1 次微分係数と同様にして、(3.93) 式をアナログモンテカルロ法によるタリースコアリング形式に変形すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 k_j}{\partial a^2} &= \frac{1}{\int dP S_{f,j}(P)} \sum_{m=1}^{\infty} \int dP_m \cdots \int dP_1 \int d\mathbf{r}_0 \\ &\quad \times \left[ \sum_{\ell=1}^m W_f^{(2)}(P_{\ell}, \cdots, P_1, \mathbf{r}_0) p_f(P_{\ell}) \right] H(P_m, \cdots, P_1, \mathbf{r}_0) \end{aligned} \quad (3.95)$$

となり、更に非アナログモンテカルロ法によるタリースコアリング形式に変形すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 k_j}{\partial a^2} &= \frac{1}{\int dP S_{f,j}(P)} \sum_{m=1}^{\infty} \int dP_m \cdots \int dP_1 \int d\mathbf{r}_0 \\ &\quad \times \left[ \sum_{\ell=1}^m W_f^{(2)}(P_{\ell}, \cdots, P_1, \mathbf{r}_0) W_f(P_{\ell}, \cdots, P_1, \mathbf{r}_0) \right] \tilde{H}(P_{\ell}, \cdots, P_1, \mathbf{r}_0) \end{aligned} \quad (3.96)$$

となる。1 次微分係数の場合と同様、 $W_f^{(2)} W_f$  をスコアリングすることにより実効増倍率の 2 次微分係数を評価することができる。

(3.96) 式を、源摂動を含まない項と源摂動のみを含む項に分割することを考える。1 次微分係数に対する重み係数は、(3.40) 式、(3.46) 式、(3.48) 式から

$$W_f^{(1)}(P_m, \dots, P_1, \mathbf{r}_0) = W_{f,\text{NPS}}^{(1)} + W_{\text{PS},j}^{(1)} \quad (3.97)$$

と表したので、これを (3.94) 式に代入すると

$$\begin{aligned} W_f^{(2)}(P_\ell, \dots, P_1, \mathbf{r}_0) &= \frac{\partial}{\partial a} W_{f,\text{NPS}}^{(1)} + \left(W_{f,\text{NPS}}^{(1)}\right)^2 \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial a} W_{\text{PS},j}^{(1)} + 2W_{f,\text{NPS}}^{(1)} W_{\text{PS},j}^{(1)} + \left(W_{\text{PS},j}^{(1)}\right)^2 \end{aligned} \quad (3.98)$$

となる。ここで、

$$W_{f,\text{NPS}}^{(2)} \equiv \frac{\partial}{\partial a} W_{f,\text{NPS}}^{(1)} + \left(W_{f,\text{NPS}}^{(1)}\right)^2 \quad (3.99)$$

$$W_{\text{PS},j}^{(2)} \equiv \frac{\partial}{\partial a} W_{\text{PS},j}^{(1)} + 2W_{f,\text{NPS}}^{(1)} W_{\text{PS},j}^{(1)} + \left(W_{\text{PS},j}^{(1)}\right)^2 \quad (3.100)$$

と定義すれば、(3.98) 式は

$$W_f^{(2)}(P_m, \dots, P_1, \mathbf{r}_0) = W_{f,\text{NPS}}^{(2)} + W_{\text{PS},j}^{(2)} \quad (3.101)$$

として、1 次微分係数と同様の形式で書き表すことができる。従って、第  $j$  世代における、源摂動を含まない実効増倍率の 2 次微分係数は、

$$\text{Est} \left[ \frac{\partial^2 k_{\text{NPS},j}}{\partial a^2} \right] = \frac{1}{N} \sum_{\ell} w_{f,\text{NPS},\ell}^{(2)} w_{f,\ell} \quad (3.102)$$

として評価することができる。ここで、 $w_{f,\text{NPS},\ell}^{(2)}$  は、 $W_{f,\text{NPS}}^{(2)}$  のスコアリング値である。また、源摂動効果については、

$$\text{Est} \left[ \frac{\partial^2 k_{\text{PS},j}}{\partial a^2} \right] = \frac{1}{N} \sum_{\ell} w_{\text{PS},j}^{(2)} w_{f,\ell} \quad (3.103)$$

により評価することができる。ここで、 $w_{\text{PS},j}^{(2)}$  は、 $W_{\text{PS},j}^{(2)}$  のスコアリング値である。 $w_{f,\text{NPS},\ell}^{(2)}$  が具体的にどのような量になるのかについては、次項で述べる。2 次の源摂動微分量  $w_{\text{PS},j}^{(2)}$  が具体的にどのような量になるのかについては、第 4 章で詳しく述べる。

### 3.3.7 2 次微分係数に対するスコアリング

本項では、2 次微分係数に対するスコアリング値  $w_{f,\ell}^{(2)}$  が具体的にどのような量になるのかを考える。2 次微分係数に対する重み係数は、(3.99) 式で与えられ、この式の右辺第 2 項については、既に、3.3.3 項で見たとおりである。右辺第 1 項の  $\partial W_f^{(1)} / \partial a$  について考える。

(3.40) 式より、 $W_f^{(1)}$  は

$$\begin{aligned} W_f^{(1)}(P_m, \dots, P_1, \mathbf{r}_0) &= \\ &\frac{\partial}{\partial a} \ln p_f(P_\ell) + \frac{\partial}{\partial a} \ln K_s(P_\ell \leftarrow P_{\ell-1}) + \dots + \frac{\partial}{\partial a} \ln K_s(P_2 \leftarrow P_1) \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial a} \ln T(P_1 \leftarrow \mathbf{r}_0) + \frac{\partial}{\partial a} \ln S_{f,j}(\mathbf{r}_0, E_1, \boldsymbol{\Omega}_1) \end{aligned} \quad (3.104)$$



と表すことができるので、これを  $a$  に関して微分すると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a} W_f^{(1)}(P_m, \dots, P_1, \mathbf{r}_0) = & \\ & \frac{\partial^2}{\partial a^2} \ln p_f(P_\ell) + \frac{\partial^2}{\partial a^2} \ln K_s(P_\ell \leftarrow P_{\ell-1}) + \dots + \frac{\partial^2}{\partial a^2} \ln K_s(P_2 \leftarrow P_1) \\ & + \frac{\partial^2}{\partial a^2} \ln T(P_1 \leftarrow \mathbf{r}_0) + \frac{\partial^2}{\partial a^2} \ln S_{f,j}(\mathbf{r}_0, E_1, \boldsymbol{\Omega}_1) \end{aligned} \quad (3.105)$$

となる。遷移カーネルの2次微分項については、更に、

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial a^2} \ln K_s(P \leftarrow P') = & \\ & \frac{\partial^2}{\partial a^2} \ln T(\mathbf{r} \leftarrow \mathbf{r}', E, \boldsymbol{\Omega}) + \frac{\partial^2}{\partial a^2} \ln C_s(\mathbf{r}', E \leftarrow E', \boldsymbol{\Omega} \leftarrow \boldsymbol{\Omega}') \end{aligned} \quad (3.106)$$

となるので、2次の重み係数を評価するために必要な量は、 $p_f$ 、輸送カーネル、散乱カーネル、核分裂源の2次の微分項である。ここでは、 $p_f$ 、輸送カーネル、散乱カーネルについてのみ調べる。

まず、 $p_f$  について考察する。 $p_f$  は (2.138) 式で定義されるので、(3.105) 式の右辺第1項については

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial a^2} \ln p_f(\mathbf{r}, E) = & \frac{1}{\nu \Sigma_f} \frac{\partial^2}{\partial a^2} \nu \Sigma_f(\mathbf{r}, E) - \left( \frac{1}{\nu \Sigma_f} \frac{\partial}{\partial a} \nu \Sigma_f(\mathbf{r}, E) \right)^2 \\ & - \frac{1}{\Sigma_t} \frac{\partial^2}{\partial a^2} \Sigma_t(\mathbf{r}, E) + \left( \frac{1}{\Sigma_t} \frac{\partial}{\partial a} \Sigma_t(\mathbf{r}, E) \right)^2 \end{aligned} \quad (3.107)$$

となる。

輸送カーネルについて考察する。粒子がある均質な摂動領域で飛行距離  $s$  だけ移動し、その領域内で衝突を起こしたとすると、輸送カーネルは (3.53) 式で表される。よって、

$$\frac{\partial^2}{\partial a^2} \ln T(\mathbf{r} \leftarrow \mathbf{r}', E, \boldsymbol{\Omega}) = \frac{1}{\Sigma_t} \frac{\partial^2 \Sigma_t}{\partial a^2} - \left( \frac{1}{\Sigma_t} \frac{\partial \Sigma_t}{\partial a} \right)^2 - \frac{\partial^2 \Sigma_t}{\partial a^2} s \quad (3.108)$$

となる。中性子が、図 3.2 で示されるように2領域にまたがって飛行した場合、輸送カーネルは (3.56) 式で表されるので、重み係数は

$$\frac{\partial^2}{\partial a^2} \ln T(\mathbf{r} \leftarrow \mathbf{r}', E, \boldsymbol{\Omega}) = \frac{1}{\Sigma_{t,2}} \frac{\partial^2 \Sigma_{t,2}}{\partial a^2} - \left( \frac{1}{\Sigma_{t,2}} \frac{\partial \Sigma_{t,2}}{\partial a} \right)^2 - \left( \frac{\partial^2 \Sigma_{t,2}}{\partial a^2} s_2 + \frac{\partial^2 \Sigma_{t,1}}{\partial a^2} s_1 \right) \quad (3.109)$$

となる。一般に、 $n$  領域にまたがって飛行した場合、輸送カーネルは (3.59) 式で表されるので、重み係数は、

$$\frac{\partial^2}{\partial a^2} \ln T(\mathbf{r} \leftarrow \mathbf{r}', E, \boldsymbol{\Omega}) = \frac{1}{\Sigma_{t,n}} \frac{\partial^2 \Sigma_{t,n}}{\partial a^2} - \left( \frac{1}{\Sigma_{t,n}} \frac{\partial \Sigma_{t,n}}{\partial a} \right)^2 - \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial^2 \Sigma_{t,i}}{\partial a^2} s_i \right) \quad (3.110)$$

となる。以上より、輸送カーネルに対する重み係数は

$$\begin{aligned} \text{ある領域で距離 } s \text{ 飛行したとき} & \Rightarrow -\frac{\partial^2 \Sigma_t}{\partial a^2} s \\ \text{衝突したとき} & \Rightarrow \frac{1}{\Sigma_t} \frac{\partial^2 \Sigma_t}{\partial a^2} - \left( \frac{1}{\Sigma_t} \frac{\partial \Sigma_t}{\partial a} \right)^2 \end{aligned}$$

をスコアリングすればよいことが分かる。

散乱カーネルの重み係数について考察する。衝突核種と散乱タイプを選択する必要のない多群モンテカルロ法の場合、散乱カーネルは (3.61) 式で表されるので、重み係数は (3.62) 式を  $a$  について微分することにより得られ、

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial a^2} \ln C_s(\mathbf{r}, E \leftarrow E', \boldsymbol{\Omega} \leftarrow \boldsymbol{\Omega}') = \\ \frac{1}{\Sigma_s} \frac{\partial^2 \Sigma_s}{\partial a^2} - \left( \frac{1}{\Sigma_s} \frac{\partial \Sigma_s}{\partial a} \right)^2 - \frac{1}{\Sigma_t} \frac{\partial^2 \Sigma_t}{\partial a^2} + \left( \frac{1}{\Sigma_t} \frac{\partial \Sigma_t}{\partial a} \right)^2 \end{aligned} \quad (3.111)$$

となる。衝突核種と散乱タイプを選択する必要がある連続エネルギーモンテカルロ法の場合、重み係数は (3.69) 式を  $a$  について微分することにより得られ、

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial a^2} \ln C_{s,x}^k(\mathbf{r}, E \leftarrow E', \boldsymbol{\Omega} \leftarrow \boldsymbol{\Omega}') \\ = \frac{1}{\Sigma_x^k} \frac{\partial^2 \Sigma_x^k}{\partial a^2} - \left( \frac{1}{\Sigma_x^k} \frac{\partial \Sigma_x^k}{\partial a} \right)^2 + \frac{1}{\nu_x^k f_x^k} \frac{\partial^2 (\nu_x^k f_x^k)}{\partial a^2} - \left( \frac{1}{\nu_x^k f_x^k} \frac{\partial (\nu_x^k f_x^k)}{\partial a} \right)^2 \\ - \frac{1}{\Sigma_t} \frac{\partial^2 \Sigma_t}{\partial a^2} + \left( \frac{1}{\Sigma_t} \frac{\partial \Sigma_t}{\partial a} \right)^2 \end{aligned} \quad (3.112)$$

となる。衝突解析により、散乱核種  $k = \kappa$ 、散乱タイプ  $x = \eta$  が決まると

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial a^2} \ln C_{s,\eta}^\kappa(\mathbf{r}, E \leftarrow E', \boldsymbol{\Omega} \leftarrow \boldsymbol{\Omega}') \\ = \frac{1}{\Sigma_\eta^\kappa} \frac{\partial^2 \Sigma_\eta^\kappa}{\partial a^2} - \left( \frac{1}{\Sigma_\eta^\kappa} \frac{\partial \Sigma_\eta^\kappa}{\partial a} \right)^2 + \frac{1}{\nu_\eta^\kappa f_\eta^\kappa} \frac{\partial^2 (\nu_\eta^\kappa f_\eta^\kappa)}{\partial a^2} - \left( \frac{1}{\nu_\eta^\kappa f_\eta^\kappa} \frac{\partial (\nu_\eta^\kappa f_\eta^\kappa)}{\partial a} \right)^2 \\ - \frac{1}{\Sigma_t} \frac{\partial^2 \Sigma_t}{\partial a^2} + \left( \frac{1}{\Sigma_t} \frac{\partial \Sigma_t}{\partial a} \right)^2 \end{aligned} \quad (3.113)$$

となり、散乱カーネルに対する重み係数は、(3.113) 式から求められる。

遷移カーネルに対する重み係数は、輸送カーネルと散乱カーネルの重み係数をまとめると、断面積が均質なある領域において距離  $s$  飛行したとき

$$\begin{aligned} -s \frac{\partial^2 \Sigma_t}{\partial a^2} &= -s \sum_k \frac{\partial}{\partial a} \left( \frac{\partial \sigma_t^k}{\partial a} N^k + \sigma_t^k \frac{\partial N^k}{\partial a} \right) \\ &= -s \sum_k \left( \frac{\partial^2 \sigma_t^k}{\partial a^2} N^k + 2 \frac{\partial \sigma_t^k}{\partial a} \frac{\partial N^k}{\partial a} + \sigma_t^k \frac{\partial^2 N^k}{\partial a^2} \right) \end{aligned} \quad (3.114)$$

$$= -s \sum_k \left( \frac{1}{\sigma_t^k} \frac{\partial^2 \sigma_t^k}{\partial a^2} + 2 \frac{1}{\sigma_t^k} \frac{\partial \sigma_t^k}{\partial a} \frac{1}{N^k} \frac{\partial N^k}{\partial a} + \frac{1}{N^k} \frac{\partial^2 N^k}{\partial a^2} \right) \Sigma_t^k \quad (3.115)$$

をスコアリングし、核種  $\kappa$  と衝突し、散乱タイプ  $\eta$  で散乱したとき

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Sigma_\eta^\kappa} \frac{\partial^2 \Sigma_\eta^\kappa}{\partial a^2} - \left( \frac{1}{\Sigma_\eta^\kappa} \frac{\partial \Sigma_\eta^\kappa}{\partial a} \right)^2 + \frac{1}{\nu_\eta^\kappa f_\eta^\kappa} \frac{\partial^2 (\nu_\eta^\kappa f_\eta^\kappa)}{\partial a^2} - \left( \frac{1}{\nu_\eta^\kappa f_\eta^\kappa} \frac{\partial (\nu_\eta^\kappa f_\eta^\kappa)}{\partial a} \right)^2 \\ = \frac{1}{\sigma_\eta^\kappa} \frac{\partial^2 \sigma_\eta^\kappa}{\partial a^2} - \left( \frac{1}{\sigma_\eta^\kappa} \frac{\partial \sigma_\eta^\kappa}{\partial a} \right)^2 + \frac{1}{N^k} \frac{\partial^2 N^k}{\partial a^2} - \left( \frac{1}{N^k} \frac{\partial N^k}{\partial a} \right)^2 \\ + \frac{1}{\nu_\eta^\kappa f_\eta^\kappa} \frac{\partial^2 (\nu_\eta^\kappa f_\eta^\kappa)}{\partial a^2} - \left( \frac{1}{\nu_\eta^\kappa f_\eta^\kappa} \frac{\partial (\nu_\eta^\kappa f_\eta^\kappa)}{\partial a} \right)^2 \end{aligned} \quad (3.116)$$

をスコアリングすればよい。(3.115) 式と (3.116) 式から分かるように、2 次の微分係数を評価するために新たにスコアリングすべき量は、 $1/\sigma_\eta^\kappa \cdot \partial^2 \sigma_\eta^\kappa / \partial a^2$ 、 $1/N^k \cdot \partial^2 N^k / \partial a^2$ 、 $1/\nu_\eta^\kappa f_\eta^\kappa \cdot \partial^2 (\nu_\eta^\kappa f_\eta^\kappa) / \partial a^2$  である。

### 3.3.8 誤差評価

1 次と 2 次微分係数の最終的な評価値は、3.2.4 項と同様にして有効バッチ数について平均値をとることによって求める。即ち、

$$E \left[ \frac{\partial k}{\partial a} \right] = \frac{1}{N_b - N_{\text{skip}}} \sum_{j=N_{\text{skip}}+1}^{N_b} \text{Est} \left[ \frac{\partial k_j}{\partial a} \right] \quad (3.117)$$

$$E \left[ \frac{\partial^2 k}{\partial a^2} \right] = \frac{1}{N_b - N_{\text{skip}}} \sum_{j=N_{\text{skip}}+1}^{N_b} \text{Est} \left[ \frac{\partial^2 k_j}{\partial a^2} \right] \quad (3.118)$$

である。ここで、 $E[\partial k / \partial a]$  と  $E[\partial^2 k / \partial a^2]$  は、それぞれ、 $\partial k / \partial a$  と  $\partial^2 k / \partial a^2$  の平均値である。源摂動を考慮しない  $\partial k_{\text{NPS}} / \partial a$  も、1 次の源摂動効果  $\partial k_{\text{PS}} / \partial a$  も (3.117) 式から同様に評価される。

このとき、分散は以下のようにして評価する。

$$\sigma^2 \left[ \frac{\partial k}{\partial a} \right] = \frac{1}{N_b - N_{\text{skip}} - 1} \left( \frac{1}{N_b - N_{\text{skip}}} \sum_{j=N_{\text{skip}}+1}^{N_b} \left( \text{Est} \left[ \frac{\partial k_j}{\partial a} \right] \right)^2 - E^2 \left[ \text{Est} \left[ \frac{\partial k}{\partial a} \right] \right] \right) \quad (3.119)$$

$$\sigma^2 \left[ \frac{\partial^2 k}{\partial a^2} \right] = \frac{1}{N_b - N_{\text{skip}} - 1} \left( \frac{1}{N_b - N_{\text{skip}}} \sum_{j=N_{\text{skip}}+1}^{N_b} \left( \text{Est} \left[ \frac{\partial^2 k_j}{\partial a^2} \right] \right)^2 - E^2 \left[ \text{Est} \left[ \frac{\partial^2 k}{\partial a^2} \right] \right] \right) \quad (3.120)$$

ここで、 $\sigma[\partial k / \partial a]$  と  $\sigma[\partial^2 k / \partial a^2]$  は、それぞれ、 $\partial k / \partial a$  と  $\partial^2 k / \partial a^2$  に対する標準偏差を表す。本研究では、バッチ間 (世代間) の相関は考慮していない。

## 3.4 1 群モンテカルロ法での検証

3.2 節と 3.3 節において、相関サンプリング法と微分演算子サンプリング法を用いて、源摂動効果を評価する方法とアルゴリズムを提案した。本節では、そのアルゴリズムをモンテカルロコードに実装し、単純な体系でのベンチマーク計算により、提案した手法の検証を行うとともに、源摂動効果の定量的な評価を行う。

### 3.4.1 1 群 3 領域の無限平板体系

非常に単純な体系として、図 3.4 に示すような 1 群 3 領域無限平板体系を考える。平板の厚さはそれぞれ 0.5, 2, 0.5 cm で、すべて領域は同じ物質で構成されており、物資の全断面



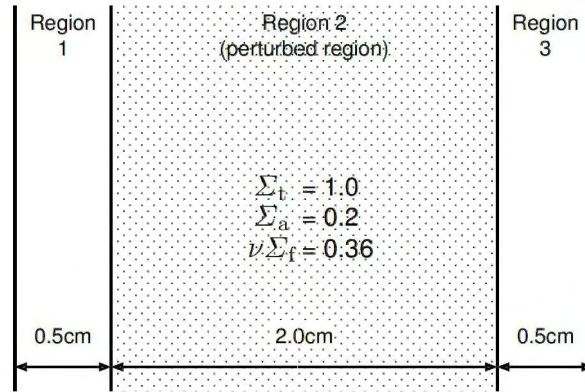


図 3.4: 1 群 3 領域無限平板体系

積、吸収断面積、生成断面積 ( $\nu \Sigma_f$ ) は、それぞれ、1.0, 0.2, 0.36  $\text{cm}^{-1}$  とする。この体系に対する実効増倍率は、ほぼ 1.0 である。中央領域の密度を 0.1% と 10% 減少 (-0.1% と 10% 変化) させることにより摂動を加えたときの実効増倍率の変化を計算する [41]。

参照解は、決定論的手法による 1 次元輸送計算コード ANISN [42] を使い、摂動系と非摂動系の実効増倍率の差から計算した。モンテカルロ計算については、このベンチマーク計算を行うために、簡単なモンテカルロプログラムを作成し、今回提案した源摂動を評価するためのアルゴリズムを実装した。すべてのモンテカルロ計算は、1 バッチ当りのヒストリー数 2 万、総ヒストリー数 440 万で、衝突エスティメータを用いて実効増倍率とその変化量を計算した。モンテカルロ計算は、Digital Personal Workstation 500a (CPU: Alpha 21164A 500MHz, OS: Red Hat Linux 5.1 for Alpha) 上で行った。

表 3.1 と表 3.2 は、それぞれ、以下に示す 3 つの手法で、中央領域の密度を 0.1% と 10% 減少させたときの実効増倍率の変化量を計算し、比較したものである。

- (a) 2 回の独立なモンテカルロ計算から差を取る直接計算
- (b) 相関サンプリング法 (源摂動効果も計算)
- (c) 2 次の微分演算子サンプリング法 (1 次の源摂動効果を計算)

摂動が小さい場合 (-0.1%)、2 回の独立なモンテカルロ計算から評価した結果は、統計誤差が大きく、信頼できる結果とはなっていない。一方、相関サンプリング法と微分演算子サンプリング法を用い、源摂動を考慮した結果は、1% 程度の統計誤差で、参照解 (ANISN の結果) と非常によく一致している。これらの結果から分かるように、摂動が小さい場合でも核分裂源効果は実効増倍率変化量の約 20% あり、源摂動効果を考慮しなければならないことが分かる。

摂動が大きい場合 (-10%)、2 回の独立なモンテカルロ計算から評価した結果は、約 1% の統計誤差で、参照解とも  $1\sigma$  統計誤差の範囲内で一致する。相関サンプリング法を用い、源摂動を考慮した結果は、参照解と  $1\sigma$  統計誤差の範囲内で一致するものの、統計誤差は約 3% あり、比較的大きな統計誤差となっている。微分演算子サンプリング法を用い、源摂動を考慮

表 3.1: 3 領域無限平板体系において中央領域の密度を 0.1%減少させたときの実効増倍率変化量の比較

手法		$\Delta k$	$1\sigma$
ANISN	(収束判定 = 1.0E-6)	-4.05E-4	
2 回の MC 独立計算		0.659E-4	4.258E-4
相関サンプリング法	源摂動考慮せず	-3.345E-4	0.007E-4
	源摂動のみ	-0.710E-4	0.048E-4
	源摂動考慮	-4.055E-4	0.048E-4
2 次の微分演算子サンプリング法	源摂動考慮せず	-3.345E-4	0.007E-4
	1 次の源摂動を考慮	-4.055E-4	0.048E-4

表 3.2: 3 領域無限平板体系において中央領域の密度を 10%減少させたときの実効増倍率変化量の比較

手法		$\Delta k$	$1\sigma$
ANISN	(収束判定 = 1.0E-6)	-4.204E-2	
2 回の MC 独立計算		-4.195E-2	0.046E-2
相関サンプリング法	源摂動考慮せず	-3.481E-2	0.007E-2
	源摂動のみ	-0.637E-2	0.127E-2
	源摂動考慮	-4.118E-2	0.127E-2
2 次の微分演算子サンプリング法	源摂動考慮せず	-3.477E-2	0.008E-2
	1 次の源摂動を考慮	-4.168E-2	0.051E-2

した結果は、参照解と  $1\sigma$  統計誤差の範囲内で一致し、統計誤差も 1%で、相関サンプリング法より精度良く実効増倍率の変化量が評価できることが分かる。

以上の結果より、今回新たに提案した源摂動評価手法とアルゴリズムが有望であることが分かった。以降の節では、本手法を連続エネルギーモンテカルロコードに実装し、本手法を検証する。

### 3.5 連続エネルギーモンテカルロ法での検証

本研究で提案した源摂動評価手法とアルゴリズムを更に検証するために、本手法を連続エネルギーモンテカルロコード MVP [27] に実装し、簡単な体系でベンチマーク計算を行う。高速炉体系に対するベンチマークとして Godiva 炉心、熱炉体系に対するベンチマークとして簡略化された STACY 炉心を選択した。検証として、これらの炉心の密度を変化させたときの反応度値を計算する。なお、密度は変化させても体積は変化しないものとする。

参照解は、摂動系と非摂動系に対する 2 回の独立なモンテカルロ計算を行い、以下の反応



度価値の定義式から計算する。

$$\Delta\rho = \frac{1}{k} - \frac{1}{k'} \quad (3.121)$$

ここで、 $k$  と  $k'$  は、それぞれ、非摂動系と摂動系に対する実効増倍率である。この  $\Delta\rho$  に対する標準偏差は以下の式で計算する。

$$\sigma[\Delta\rho] = \sqrt{\frac{\sigma^2[k]}{k^4} + \frac{\sigma^2[k']}{k'^4}}, \quad (3.122)$$

ここで、 $\sigma[k]$  と  $\sigma[k']$  は、それぞれ、 $k$  と  $k'$  に対する標準偏差である。

一方、モンテカルロ摂動計算で得られる反応度価値は次式で表される。

$$\Delta\rho = \frac{\Delta k}{k(k + \Delta k)} \quad (3.123)$$

ここで、 $\Delta k$  は実効増倍率の変化量である。この式で評価される反応度価値に対する標準偏差は次式で評価される。

$$\sigma[\Delta\rho] = \sqrt{\left[ \frac{1}{(k + \Delta k)^2} - \frac{1}{k^2} \right]^2 \sigma^2[k] + \frac{1}{(k + \Delta k)^4} \sigma^2[\Delta k]} \quad (3.124)$$

ここで、 $\sigma[\Delta k]$  は  $\Delta k$  の標準偏差である。

### 3.5.1 Godiva 炉心

Godiva 炉心 [43] に対するベンチマーク体系は、8.741 cm 半径の裸の金属ウラン球均質体系である。密度は 18.74 g/cm<sup>3</sup> で、核種組成は、94.73 wt% の <sup>235</sup>U と 5.27 wt% の <sup>238</sup>U で構成されている。この体系について、図 3.5 に示すような 2 つの密度摂動問題を設定し、反応度価値を計算する。1 つは一樣摂動問題 (図 3.5(a)) で、もう 1 つは中央領域摂動問題 (図 3.5(b)) である。一樣摂動問題は、体系全体の密度を一樣に変化させることによって摂動を加え、摂動によって核分裂源分布が大きく変化しないような場合に対する検証として取り上げている。一方、中央領域摂動問題は、中心の 6 cm のみ密度を変化させることによって摂動を加え、核分裂源分布が大きく変化する場合に対する検証として取り上げている。

参照解は、図に示した摂動領域の密度を、18.74 g/cm<sup>3</sup> から 20.00, 21.00, 23.50, 26.00 g/cm<sup>3</sup> へと 4 段階に変化させた場合について計算した。一樣摂動問題の場合、この 4 段階の変化は、参考文献 [44] と [45] において Godiva 炉心に対するベンチマーク問題として提案されている。精度のよい参照解を得るため、1 バッチ当りのヒストリー数 (バッチサイズ) を 1 万とし、最初の 100 バッチを統計処理から除き、そこから 1 万バッチの結果を統計処理することによって計算した。核データライブラリは、すべての計算において、JENDL-3.2 [46] を用いた。

一方、摂動計算手法による結果はすべて、バッチサイズ 1 万、最初の 100 バッチを除く、1,000 有効バッチのモンテカルロ計算により求めた。相関サンプリング法を用いた場合、源摂動効果を考慮した場合と考慮しない場合の反応度価値を計算した。微分演算子サンプリング法を用いた場合、源摂動を含まない 2 次までの微分係数 ( $\partial k_{\text{NPS}}/\partial a$  と  $\partial^2 k_{\text{NPS}}/\partial a^2$ ) 及び、源摂動 1 次微分係数  $\partial k_{\text{PS}}/\partial a$  を計算し、次式と (3.123) 式から反応度価値を計算した。

$$\Delta k = \left( \frac{\partial k_{\text{NPS}}}{\partial a} + \frac{\partial k_{\text{PS}}}{\partial a} \right) \Delta a + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 k_{\text{NPS}}}{\partial a^2} (\Delta a)^2 \quad (3.125)$$



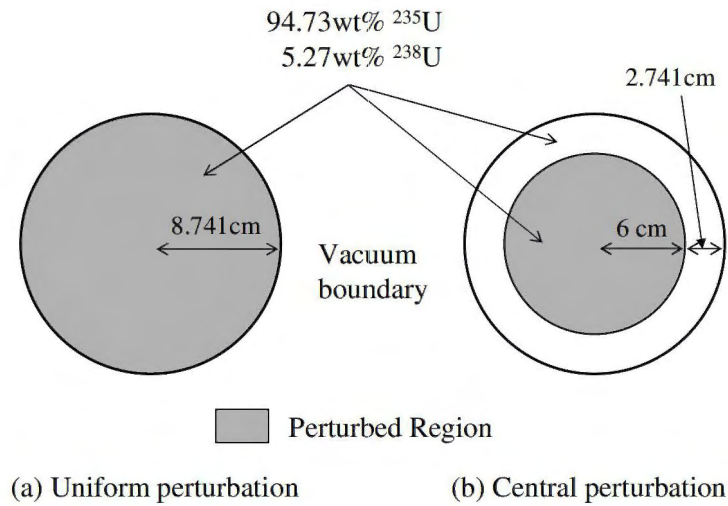


図 3.5: Godiva 密度摂動問題

相関サンプリング法と微分演算子サンプリング法で得られる結果はすべて1回のモンテカルロ計算から求めた。

### 1) 一様摂動問題に対する相関サンプリング法の結果

まず、源摂動効果を評価するためにどのくらい源摂動反復をしなければならないのかを調べる。図 3.6 は、 $\Delta k_{\text{PS}}$  の源摂動反復回数に対する依存性を示したものである。20.0 g/cm<sup>3</sup> と 21.0 g/cm<sup>3</sup> に対する  $\Delta k_{\text{PS}}$  は、源摂動反復回数が増えるに従って収束していくが 23.5 g/cm<sup>3</sup> と 26.0 g/cm<sup>3</sup> に対する  $\Delta k_{\text{PS}}$  は、源摂動反復回数が増えると大きく変動し、統計誤差が非常に大きくなることが分かる。また、すべてのケースにおいて、統計誤差は源摂動反復回数とともに増加している。(26.0 g/cm<sup>3</sup> の結果は図に示されていないが、23.5 g/cm<sup>3</sup> の結果に比べて非常に大きい。) 従って、一様摂動問題に対して相関サンプリング法で源摂動効果を求める場合、小さい摂動の場合でしか求めることができない。また、小さい摂動の場合 (20.0 g/cm<sup>3</sup> と 21.0 g/cm<sup>3</sup>)、源摂動反復回数は5回ほどで十分一定値に収束しているとみなすことができる。

図 3.7 は、Godiva 一様摂動問題に対する参照解と相関サンプリング法の結果を比較したものである。参照解は十分な精度で計算されており、誤差は丸印のマーカ内に収まっている。ばつ印のマーカは、源摂動を考慮しない場合の結果で、参照解と比べて3%ほど過小評価するものの、比較的良い結果が得られている。三角印のマーカは、10回の源摂動反復で計算した源摂動効果を含む反応度価値の結果である。20.0 g/cm<sup>3</sup> と 21.0 g/cm<sup>3</sup> のケースにおいて、参照解と非常によく一致する結果が得られているが、23.5 g/cm<sup>3</sup> と 26.0 g/cm<sup>3</sup> のケースにおいては、統計誤差が大きく、信頼できない結果となっている。

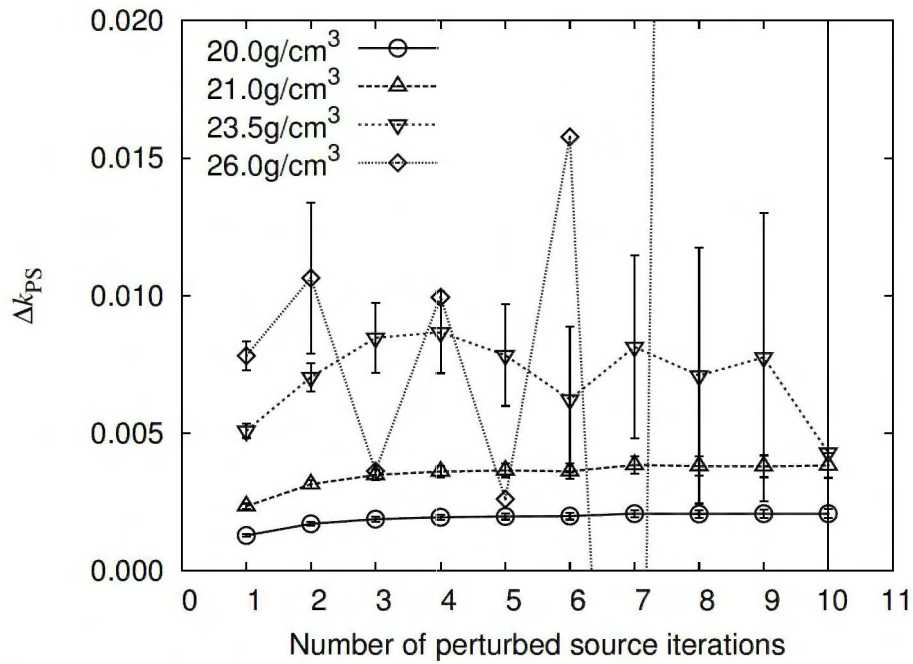


図 3.6: 相関サンプリング法を用いて Godiva 一様摂動問題を計算した場合の、 $\Delta k_{PS}$  の源摂動反復回数に対する依存性 (誤差棒は 2 標準偏差を表している。26.0 g/cm<sup>3</sup> に対する誤差は、最初の 2 点にのみ示している。)

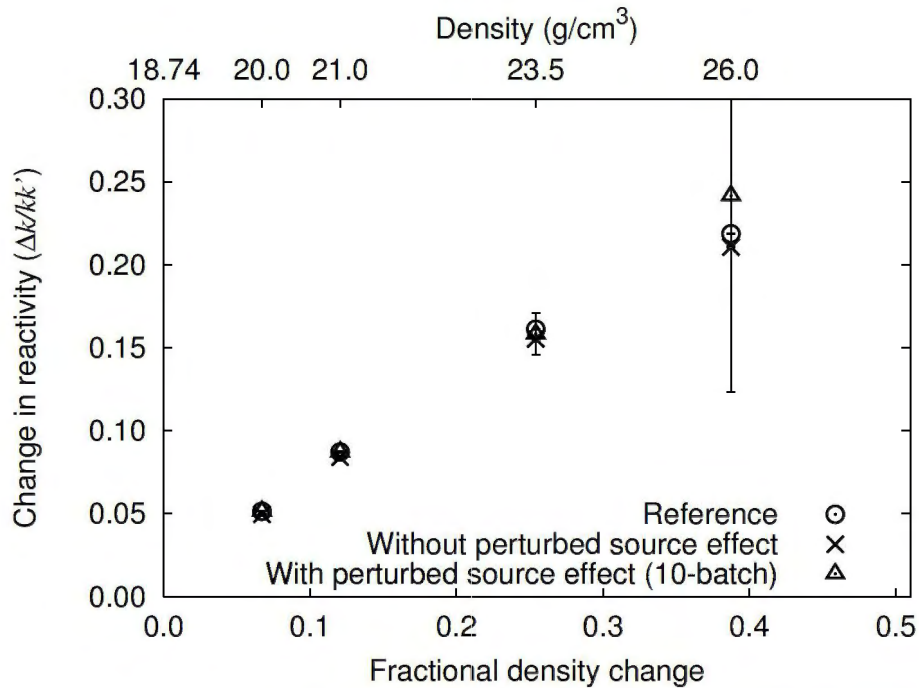


図 3.7: Godiva 一様摂動問題に対する参照解と相関サンプリング法の結果の比較 (誤差棒は 2 標準偏差を表している。ほとんどのケースにおいて誤差はマーカーに隠れるほど小さいが、23.5 g/cm<sup>3</sup> と 26.0 g/cm<sup>3</sup> のケースについてのみ誤差が大きい。)



## 2) 一様摂動問題に対する微分演算子サンプリング法の結果

相関サンプリング法のケースと同様に、まず、源摂動の1次微分係数  $\partial k_{PS}/\partial a$  を評価するために、どれくらいの源摂動反復回数が必要であるかを調べる。図 3.8 は、 $\partial k_{PS}/\partial a$  の源摂動反復回数に対する依存性を示したものである。図から分かるように、 $\partial k_{PS}/\partial a$  を評価するための源摂動反復回数は、数回では不十分で、少なくとも5回以上の反復回数が必要である。また、統計誤差は反復回数とともに少しずつ増えることが分かる。

図 3.9 は、Godiva 一様摂動問題に対する参照解と微分演算子サンプリング法の結果を比較したものである。破線は源摂動を考慮しない結果で、実線は10回の源摂動反復で源摂動効果を考慮した結果である。源摂動を考慮しない結果は、比較的良く参照解と一致しているが、相関サンプリング法の場合と同様、約3%の過小評価が見られる。一方、源摂動を考慮した結果は参照解と良く一致しており、源摂動を考慮することにより、反応度価値の計算結果が改善されることが分かる。

ここでの微分演算子サンプリング法による結果は、2次微分係数の項までしか考慮しておらず、3次以上の項は無視している。そのため、高次微分項の効果を考慮することにより、更に参照解からずれることが懸念されるが、源摂動を考慮しない場合と、 $20.0 \text{ g/cm}^3$  と  $21.0 \text{ g/cm}^3$  に対する源摂動を考慮した場合の、相関サンプリング法と微分演算子サンプリング法の結果がよく一致していることから考えると、参照解からの過小評価の原因は、主に源摂動効果であると言える。

## 3) 中心領域摂動問題に対する相関サンプリング法の結果

図 3.10 は、 $\Delta k_{PS}$  の源摂動反復回数に対する依存性を示したものである。 $20.0 \text{ g/cm}^3$  と  $21.0 \text{ g/cm}^3$  に対する  $\Delta k_{PS}$  は、反復回数が増えるとともに一定値に収束し、統計誤差も十分小さい。 $23.5 \text{ g/cm}^3$  に対する  $\Delta k_{PS}$  は、反復回数が5回程度でほぼ一定値になるが、それ以降は、反復回数とともに誤差が急速に大きくなる。一方、 $26.0 \text{ g/cm}^3$  に対する  $\Delta k_{PS}$  は、反復回数が5回以降、値が大きくばらつくとともに、統計誤差が非常に大きくなり、信頼性のある結果を得ることができない。一様摂動問題の結果と合わせて、相関サンプリング法では、大きな摂動に対して、源摂動効果を精度良く評価することができないことが分かる。

図 3.11 は、Godiva 中心摂動問題に対する参照解と相関サンプリング法の結果を比較したものである。丸印、バツ印、三角印は、一様摂動問題の結果と同じものを表している。参照解は十分な精度で計算されており、統計誤差はマーカー内に収まっている。図に示されるように、源摂動効果を考慮しない結果は参照解を大きく過小評価しており、差異は30%-40%程度になる。一方、源摂動を考慮した結果は、 $20.0 \text{ g/cm}^3$  と  $21.0 \text{ g/cm}^3$  のケースに対して、参照解と非常に良く一致している。 $23.5 \text{ g/cm}^3$  のケースに対する結果は、統計誤差が比較的大きいものの、参照解とよく一致している。 $26.0 \text{ g/cm}^3$  のケースに対する結果は、源摂動の統計誤差が非常に大きく、信頼できる結果は得られない。



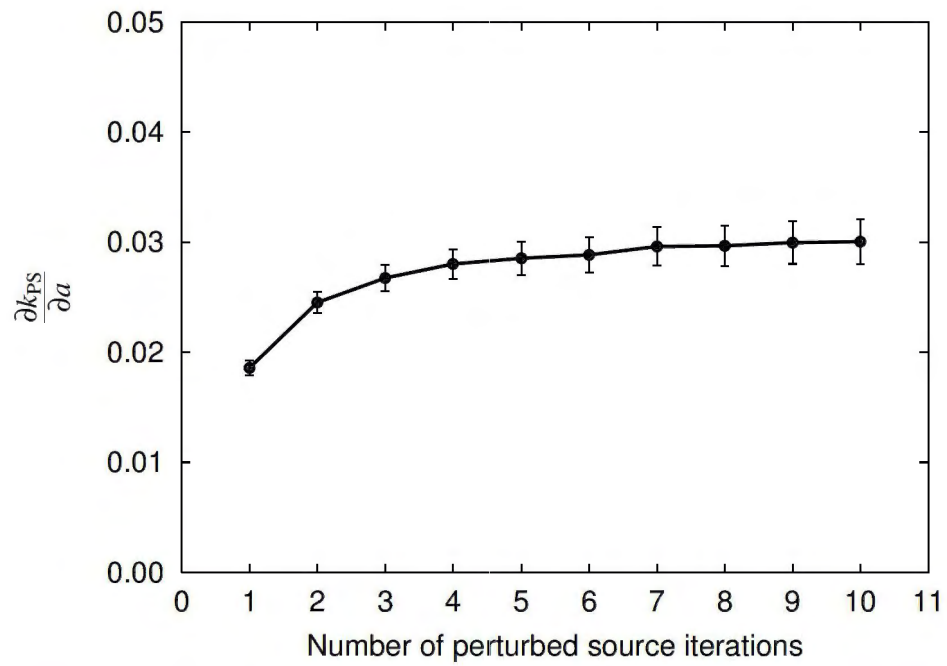


図 3.8: 微分演算子サンプリング法を用いて Godiva 一様摂動問題を計算した場合の、 $\partial k_{PS}/\partial a$  の源摂動反復回数に対する依存性 (誤差棒は 2 標準偏差を表している。)

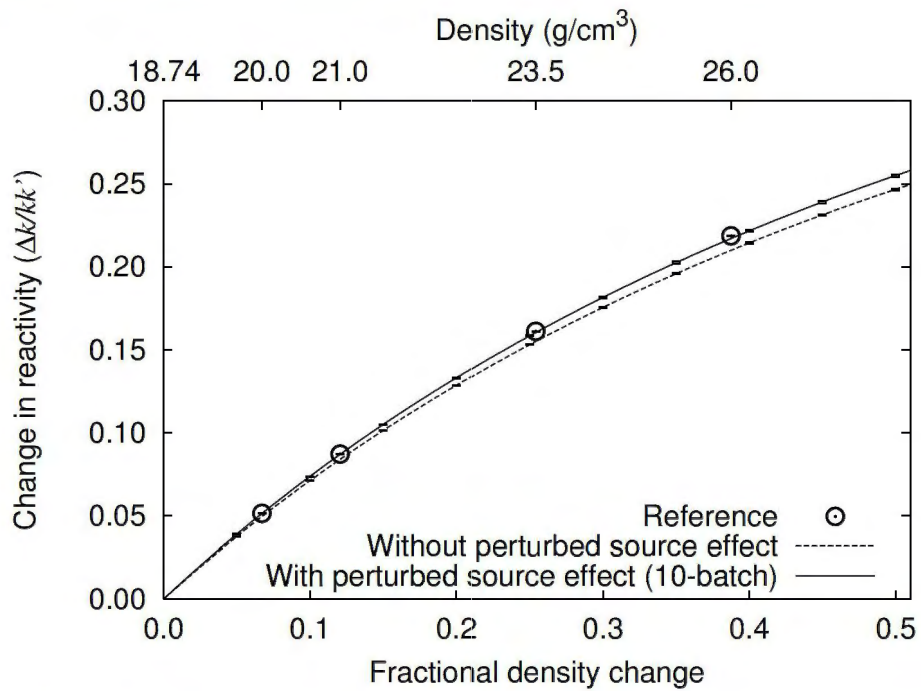


図 3.9: Godiva 一様摂動問題に対する参照解と微分演算子サンプリング法の結果の比較 (誤差棒は 2 標準偏差を表している。)

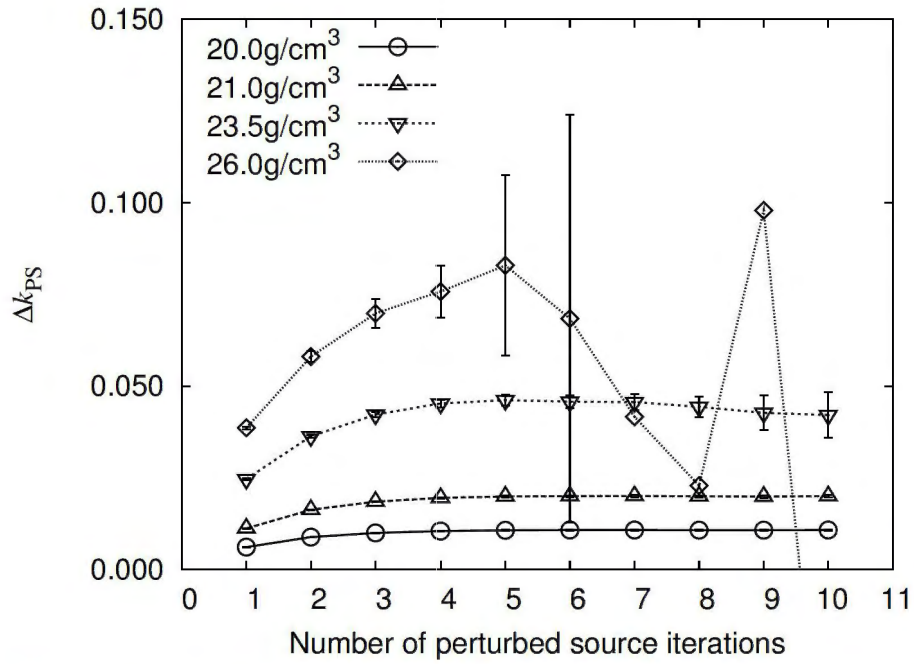


図 3.10: 相関サンプリング法を用いて Godiva 中心領域摂動問題を計算した場合の、 $\Delta k_{PS}$  の源摂動反復回数に対する依存性 (誤差棒は 2 標準偏差を表している。26.0 g/cm<sup>3</sup> のケースについて、誤差は最初の 6 点のみ表示している。)

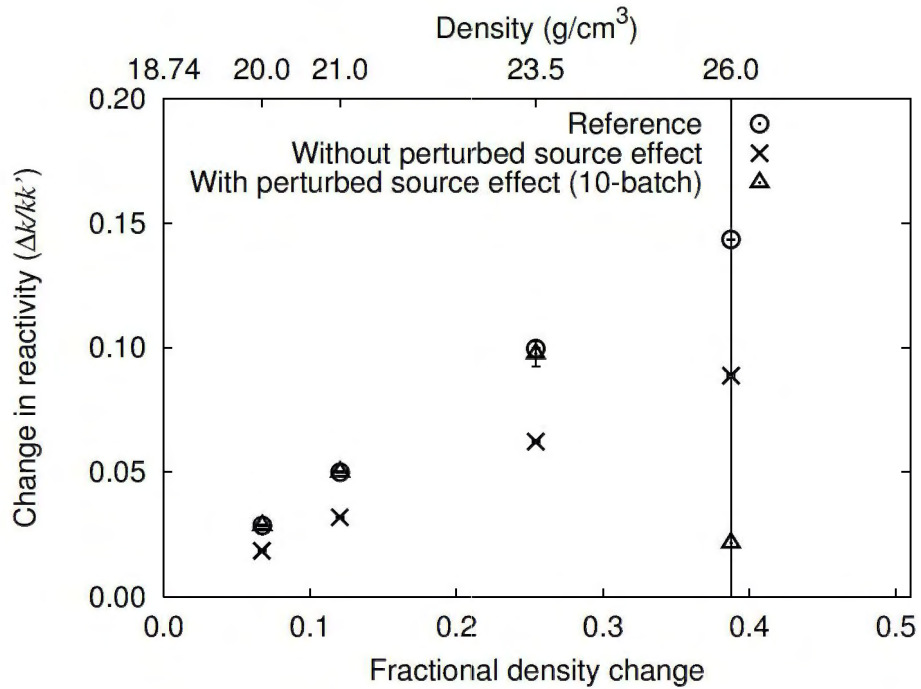


図 3.11: Godiva 中心領域摂動問題に対する参照解と相関サンプリング法の結果の比較 (誤差棒は 2 標準偏差を表している。ほとんどのケースにおいて誤差はマーカーに隠れるほど小さいが、源摂動考慮した結果に対して 23.5 g/cm<sup>3</sup> と 26.0 g/cm<sup>3</sup> のケースについてのみ誤差が大きい。)

#### 4) 中心領域摂動問題に対する微分演算子サンプリング法の結果

図 3.12 は、 $\partial k_{PS}/\partial a$  の源摂動反復回数に対する依存性を示したものである。図に示されるように、 $\partial k_{PS}/\partial a$  は、5 回程度の反復でほぼ一定となり、源摂動の微分係数を評価するためには、2、3 回の反復では不十分である。

図 3.13 は、Godiva 中心領域摂動問題に対する参照解と微分演算子サンプリング法の結果を比較したものである。破線は源摂動効果を考慮しない結果で、実線は、10 回の源摂動反復で源摂動を考慮した結果である。相関サンプリング法による結果と同様、源摂動効果を考慮しないと参照解を大きく過小評価するが、源摂動効果を考慮することにより計算結果は改善され、摂動が小さい場合 ( $20.0 \text{ g/cm}^3$  と  $21.0 \text{ g/cm}^3$  のケース) には、参照解と非常によく一致することが分かる。

微分演算子サンプリング法を用いた場合、源摂動効果を考慮しない場合の過小評価の原因として、源摂動効果と Taylor 展開の高次項を無視した効果が考えられるが、中心領域摂動問題においても、源摂動効果が主要因である。これは、摂動が小さい場合、基本的に近似のない相関サンプリング法の結果と微分演算子サンプリング法の結果は非常によく一定しているからである。摂動量が大きくなるにつれて、1 次の源摂動効果を考慮した結果と参照解との差異が多少見られるようになるが、これは、3 次以上の Taylor 展開の高次項 (源摂動効果を考慮しない) と 2 次以上の源摂動効果を無視した影響だと考えられる。

#### 3.5.2 簡略化された STACY 炉心

STACY は、燃料サイクル安全工学研究施設 (NUCEF) に設置されている臨界実験装置である [47]。ベンチマーク問題の対象とする実際の体系は、直径 60 cm の円筒体系で、その周りを水反射体で囲まれている体系である。炉心は硝酸ウラン溶液で構成されており、燃料は  $^{235}\text{U}$  濃縮度 9.97 wt% のウラン燃料である。

ベンチマーク問題として、図 3.14 に示すように、燃料領域が半径 22 cm で、その周りを 1 cm 厚さの水で囲まれた、無限円筒体系に簡略化した。(実効増倍率がほぼ 1.0 となるように調整した。) 燃料のウラン濃度は  $310.1 \text{ g/l}$ 、酸度 (acidity) は  $2.17 \text{ mol/l}$ 、温度は  $23.1^\circ\text{C}$  とした。表 3.3 に用いた原子数密度を示す。摂動は、この簡略化された体系の反射体水密度を減少させることによって加える。このベンチマーク問題は、熱体系において局所的に摂動を加えた場合の源摂動効果を調べることを目的としている。

参照解は、水反射体密度を 10, 20, 30, 40, 50% 減少させて、それぞれ独立に MVP コードを用いた臨界計算を行うことにより、実効増倍率の差から直接反応度価値を計算した。参照解の計算は、バッチサイズ 1 万ヒストリー、最初の 100 バッチを統計処理から除き、2 万有効バッチで行った。すべての計算において、評価済み核データとして、JENDL-3.2 を用いた。

一方、摂動計算は、バッチサイズ 1 万ヒストリー、最初の 100 バッチを統計処理から除き、2,000 有効バッチで行った。相関サンプリング法では、実効増倍率の変化量  $\Delta k$  を求め、微分演算子サンプリング法では、源摂動を考慮しない 1 次と 2 次の微分係数  $\partial k_{NPS}/\partial a$ ,  $1/2 \cdot \partial^2 k_{NPS}/\partial a^2$  と 1 次の源摂動微分係数  $\partial k_{PS}/\partial a$  を求めた。これらのパラメータは、1 回のモンテカルロ計算で評価した。



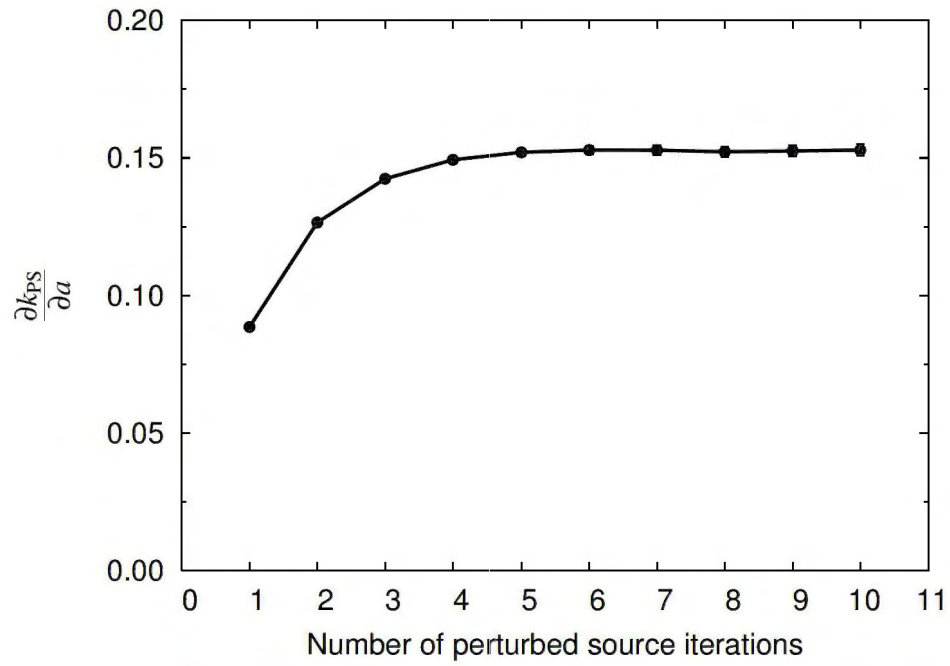


図 3.12: 微分演算子サンプリング法を用いて Godiva 中心領域摂動問題を計算した場合の、 $\partial k_{PS}/\partial a$  の源摂動反復回数に対する依存性 (誤差棒は 2 標準偏差を表している。)

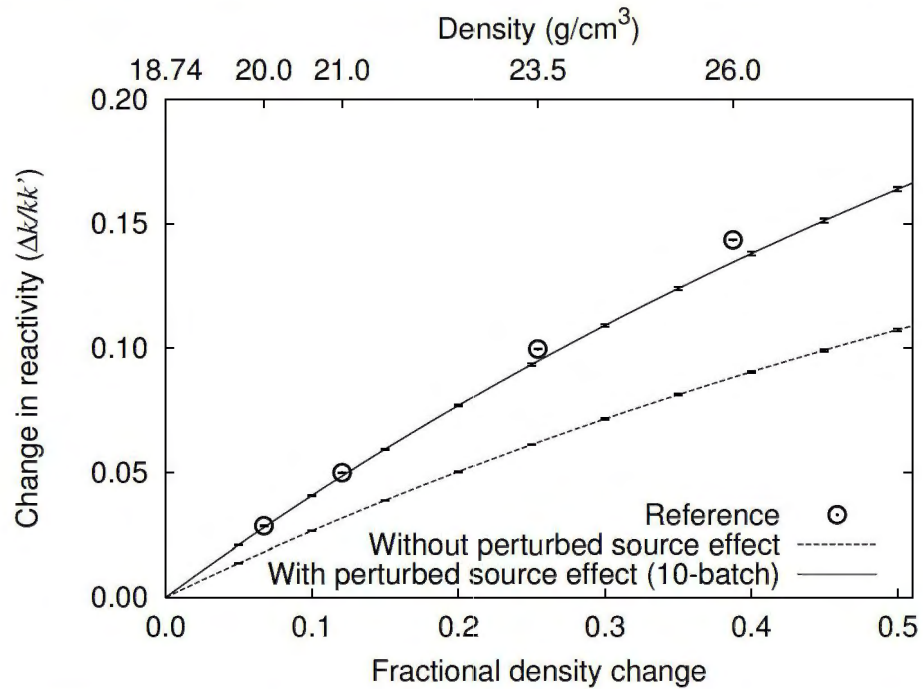


図 3.13: Godiva 中心領域摂動問題に対する参照解と微分演算子サンプリング法の結果の比較 (誤差棒は 2 標準偏差を表している。)

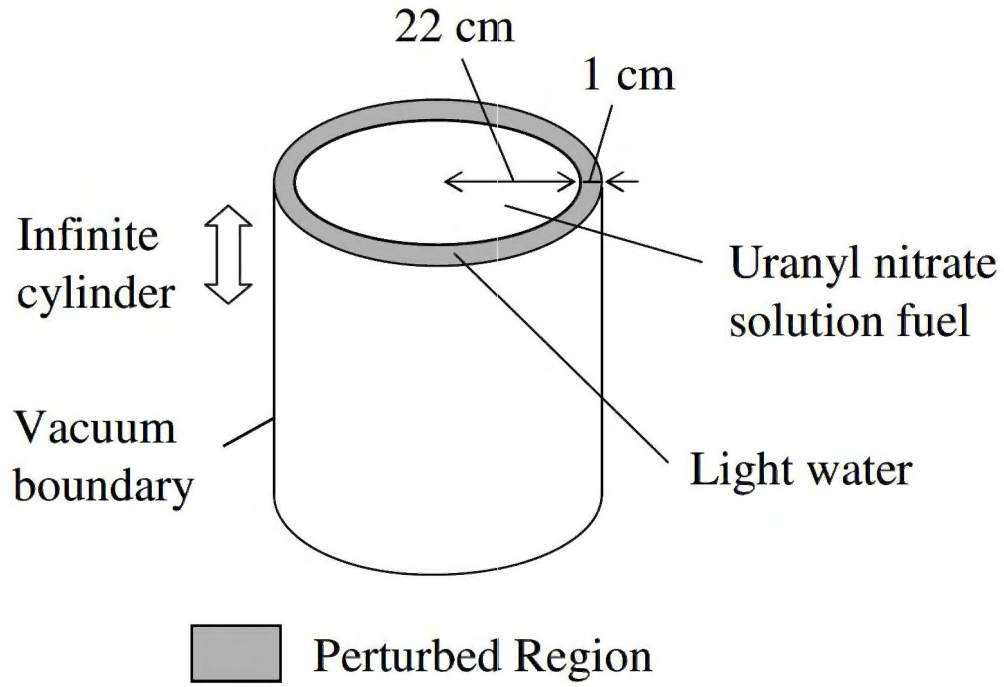


図 3.14: 簡略化された STACY 炉心に対する密度摂動問題

表 3.3: STACY 炉心に対する原子数密度

	Nuclide	Atomic density (atoms·barn <sup>-1</sup> ·cm <sup>-1</sup> )
Fuel	<sup>235</sup> U	$7.92122 \times 10^{-5}$
	<sup>238</sup> U	$7.06258 \times 10^{-4}$
	<sup>1</sup> H	$5.69525 \times 10^{-2}$
	<sup>14</sup> N	$2.87772 \times 10^{-3}$
	<sup>16</sup> O	$3.80270 \times 10^{-2}$
Reflector	<sup>1</sup> H	$6.66566 \times 10^{-2}$
	<sup>16</sup> O	$3.33283 \times 10^{-2}$

## 1) 相関サンプリング法による結果

図 3.15 は、STACY 水反射体摂動問題に対する  $\Delta k_{PS}$  の源摂動反復回数への依存性を示したものである。水密度を 10%と 20%減少させたときのケースに対する  $\Delta k_{PS}$  は、5 回程度の反復で一定値に収束し、統計誤差も十分小さく評価することができる。水密度を 30%減少させたときも、5 回程度の反復で一定値に収束するが、それ以上の反復回数では、統計誤差が徐々に大きくなる。水密度を 40%と 50%減少させたときは、値が大きくばらつき、もはや源摂動効果は精度良く評価できない。この傾向は、Godiva 摂動炉心と同じで、相関サンプリング法を用いる場合、摂動量が大きくなると源摂動を評価することは非常に難しくなることが分かる。

図 3.16 は、STACY 水反射体摂動問題に対する反応度価値の参照解と相関サンプリング法で計算した結果を比較したものである。源摂動効果を考慮しない場合、相関サンプリング法の結果は参照解を大きく過小評価する。源摂動効果を考慮した場合、-10%と-20%のケースについては、参照解と非常によく一致する。-30%のケースについては、参照解とよく一致するが、統計誤差が比較的大きい。-40%と-50%のケースについては、統計誤差が発散してしまい、信頼性のある結果を得ることはできない。

## 2) 微分演算子サンプリング法による結果

図 3.17 は、STACY 水反射体摂動問題に対する、 $\partial k_{PS}/\partial a$  の源摂動反復回数への依存性を示したものである。Godiva 問題と同様の傾向が見られ、 $\partial k_{PS}/\partial a$  を精度良く評価するためには、源摂動反復に対して、少なくとも 5 回以上の反復回数が必要である。

図 3.18 は、STACY 水反射体摂動問題に対する反応度価値の参照解と微分演算子サンプリング法で計算した結果を比較したものである。相関サンプリング法の結果と同様、源摂動効果を考慮しなければ、参照解を大きく過小評価し、源摂動効果を考慮することにより、微分演算子サンプリング法で計算した結果は大きく改善される。STACY 摂動問題においても、やはりこの過小評価の主な原因は、源摂動効果であり、核分裂源分布が大きく変動する場合は、必ず源摂動効果を評価する必要がある。摂動量が大きくなるにつれて、参照解と源摂動効果を考慮した結果に若干の差異が見られるようになるが、これは Taylor 展開の高次項を無視した影響であると考えられる。

## 3.6 結言

従来のモンテカルロ摂動計算手法を用いた反応度価値の計算では、摂動が印加されても核分裂源分布は変化しないという仮定が用いられており、そのことによる反応度価値への効果(源摂動効果)を考慮しないことが多いが、本研究において、従来のモンテカルロ摂動計算手法では、参照解と大きな差異を生じるいくつかのケースを示した。

これまで源摂動効果を評価することは困難であったが、本研究において、相関サンプリング法と微分演算子サンプリング法の両方に対して源摂動効果を評価する新しい手法を提案した。提案した新手法を検証するため、その手法に対するアルゴリズムを開発、MVP に実装



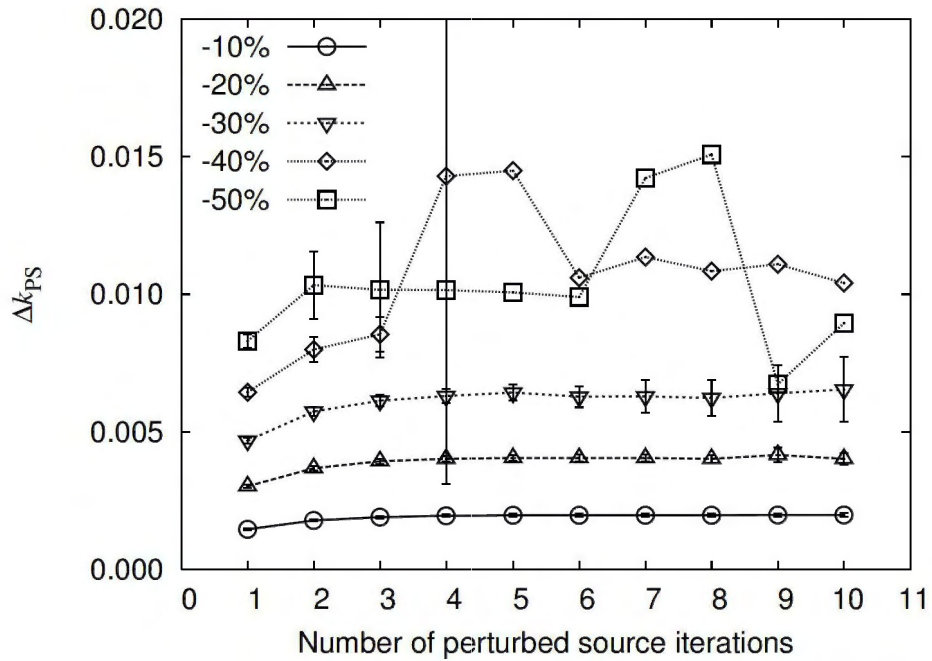


図 3.15: 相関サンプリング法を用いて STACY 水反射体摂動問題を計算した場合の、 $\Delta k_{PS}$  の源摂動反復回数に対する依存性 (誤差棒は 2 標準偏差を表している。-40%と-50%のケースについては、それぞれ最初の 4 点と 3 点のみ誤差を表示している。)

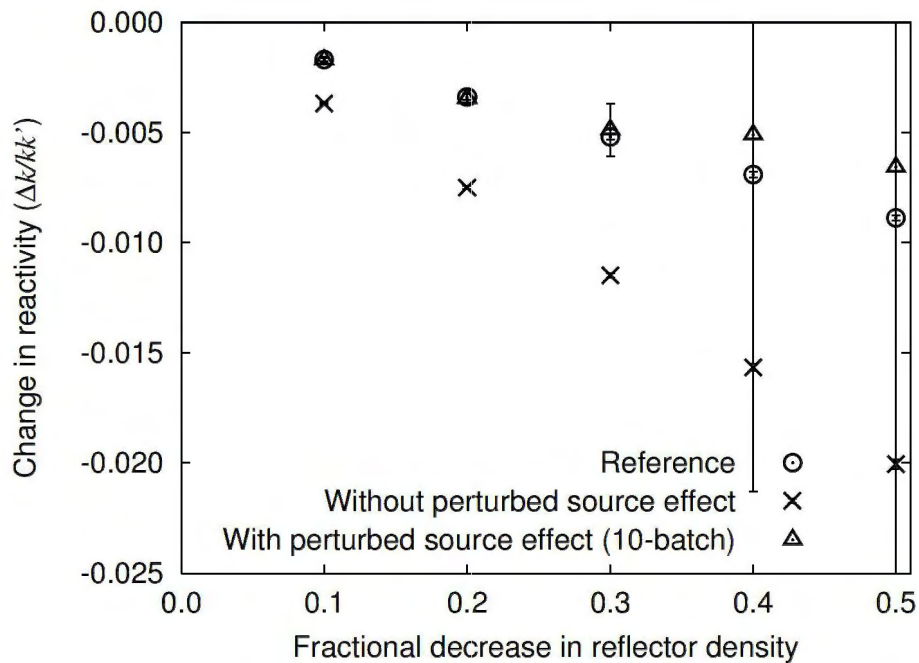


図 3.16: STACY 水反射体摂動問題に対する参照解と相関サンプリング法の結果の比較 (誤差棒は 2 標準偏差を表している。ほとんどのケースにおいて誤差はマーカーに隠れるほど小さいが、源摂動効果を考慮した-30%, -40%, -50%のケースについてのみ誤差が大きい。)

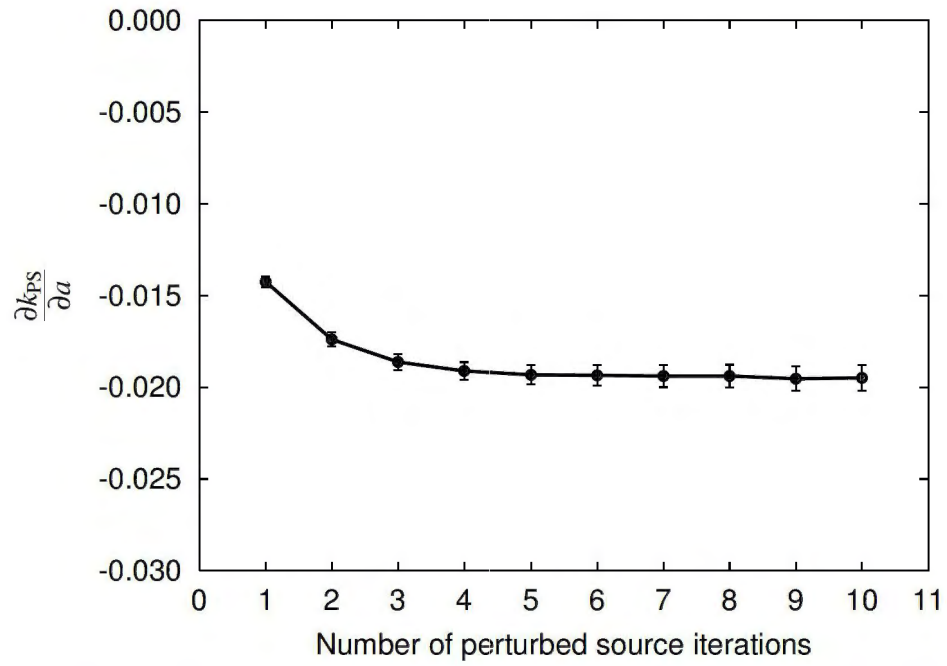


図 3.17: 微分演算子サンプリング法を用いて STACY 水反射体摂動問題を計算した場合の、 $\partial k_{\text{PS}} / \partial a$  の源摂動反復回数に対する依存性 (誤差棒は 2 標準偏差を表している。)

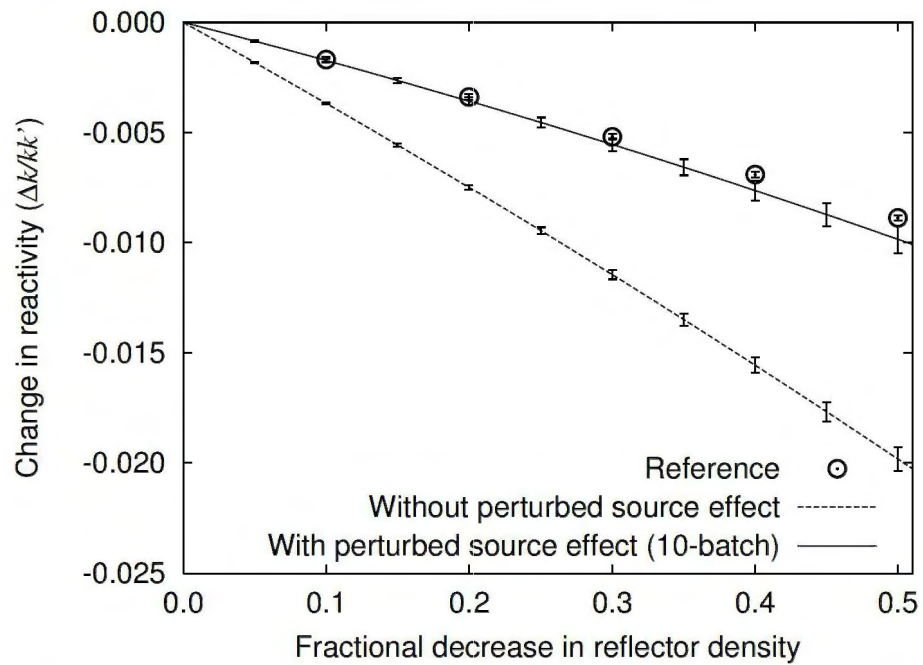


図 3.18: STACY 水反射体摂動問題に対する参照解と微分演算子サンプリング法の結果の比較 (誤差棒は 2 標準偏差を表している。)

し、簡単な体系でベンチマーク計算を実施した。ベンチマーク計算の結果、提案した手法とアルゴリズムにより源摂動効果を正確に評価することが可能であり、源摂動効果を考慮することにより反応度価値の精度を大きく改善できることを示した。しかしながら、以下の点について注意する必要がある。

- 相関サンプリング法で源摂動効果を評価する場合、小さい摂動量に対してしか精度良く評価することができない。これは、摂動量が大きくなると、源摂動効果の統計誤差が大きくなるからである。
- 微分演算子サンプリング法で源摂動効果を評価する場合、いかなる摂動量に対しても、小さい統計誤差で源摂動効果を評価することができるが、摂動量が大きくなるにつれて、Taylor 展開の高次項を無視した影響により参照解と多少の差異が見られるようになる。

本研究では、源摂動効果を評価するための源摂動反復回数についても調べた。 $\Delta k_{\text{PS}}$  や  $\partial k_{\text{PS}}/\partial a$  の値は、源摂動反復回数とともに一定の値に近づく。本研究で取り上げた簡単な体系に対するベンチマーク問題の場合、源摂動反復は5回程度で十分収束することが分かった。

今回提案した手法は、中川らと北田らによって提案された手法に比べて優れた特徴を持っている。中川らの手法では、源摂動効果は追加の中性子トラッキングにより評価され、1世代分の源摂動反復効果しか考慮されていないが、今回開発したアルゴリズムでは、追加のトラッキングは必要なく、任意の世代分の源摂動反復効果を考慮することが可能である。また、北田らの手法のように計算体系について、核分裂源分布の平均化のため再分割も必要ない。





## 第4章 微分演算子サンプリング法による サンプル反応度価値の評価

### 4.1 緒言

原子炉炉心解析では、制御棒価値、ボイド反応度価値、サンプル反応度価値などの反応度価値の計算が必要になる。しかし、反応度価値が小さい場合、モンテカルロ法で摂動系と非摂動系の実効増倍率の差から直接計算することは難しい。第3章では、相関サンプリング法と微分演算子サンプリング法のモンテカルロ摂動計算手法を小さな反応度価値の計算へ適用できるようにするために、源摂動効果を評価する手法を開発した [40]。この手法を用い、簡単な体系においてベンチマーク計算を行った結果、着目パラメータの変動量が比較的小さい摂動においては、この源摂動評価手法は有効であることが示された。しかし、実際の炉心解析においては、冷却材が完全にボイド化したときの反応度価値やサンプルを置換した時の反応度価値など、着目パラメータの変動量が100%となるような場合を計算しなければならない。そのような場合、相関サンプリング法は、第3章の結果から源摂動効果の分散が発散するという問題点が明らかになっており、一般的に用いるのは難しい。また、第3章で検証した微分演算子サンプリング法は、源摂動効果を考慮しない2次までのTaylor級数項と1次の源摂動効果のみを考慮しており、高次項が無視されている。着目パラメータの変動量が100%に近くなるにつれ、高次項の影響も無視できない可能性がある。

本章では、微分演算子サンプリング法によりTaylor展開項を評価する手法の、サンプル反応度価値計算に対する適用性について調べる [48]。そのために、第3章で低次の項までしか考慮していなかった手法について、微分演算子サンプリング法で高次の項を評価できるように拡張する必要がある。これまで、源摂動効果を考慮しない場合について、Morillon が微分演算子サンプリング法を用いて任意の次数の微分係数を評価する手法を提案しており [49]、Raskash らは、著者らと同じ手法で2次までの源摂動効果を考慮できるように拡張している [50]。本研究では、Morillon の手法を拡張し、任意の次数の源摂動効果を陽に計算できるように定式化しなおす。また、源摂動の高次微分係数に対する規格化条件についても導出する。

ベンチマーク計算を実施するため、拡張した微分演算子サンプリング法をMVPコード [27] に実装し、検証計算を行う。ベンチマーク体系は、Godvia 炉心、Jezebel 炉心及びTCA 炉心 [51] である。最初の2つは単純な球の高速炉体系で、TCA 炉心はより複雑な熱炉の体系である。Jezebel 炉心とTCA 炉心においては、実際に行われたサンプル反応度価値実験を対象にしているが、本研究では、実験値と計算値の比較することを目的とはしていない。Taylor展開手法の適用性を調べるために、2回の独立なモンテカルロ計算から得られた参照解とモンテカルロ摂動計算により得られた結果を比較する。

## 4.2 高次微分係数評価手法

第3章の(3.32)式で既に表したとおり、第 $j$ 世代の実効増倍率の変化量は次式で表される。

$$\Delta k_j = \frac{\partial k_j}{\partial a} \Delta a + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 k_j}{\partial a^2} (\Delta a)^2 + \cdots + \frac{1}{n!} \frac{\partial^n k_j}{\partial a^n} (\Delta a)^n + \cdots \quad (4.1)$$

ここで、 $a$ は摂動を受けるパラメータである。第3章では、2次までの微分係数を評価する手法を考えたが、本節では、任意次数の微分係数を評価する手法を考える。

### 4.2.1 実効増倍率に対する高次の微分係数

本項では、実効増倍率に対する高次の微分係数についての定式化を考える。実効増倍率に対する1次と2次の微分係数は、それぞれ、(3.37)式と(3.93)式で表され、重み係数が違うだけの同じ形式である。これらの形式と同様にして、 $n-1$ 次の微分係数が以下の形式で表されていると仮定する。

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{n-1} k_j}{\partial a^{n-1}} &= \frac{1}{\int dP S_{f,j}(P)} \sum_{m=1}^{\infty} \int dP_m \cdots \int dP_1 \int d\mathbf{r}_0 W_f^{(n-1)}(P_m, \cdots, P_1, \mathbf{r}_0) \\ &\quad \times F(P_m, \cdots, P_1, \mathbf{r}_0) \end{aligned} \quad (4.2)$$

(4.2)式を $a$ について微分すると次式が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial^n k_j}{\partial a^n} &= \frac{1}{\int dP S_{f,j}(P)} \sum_{m=1}^{\infty} \int dP_m \cdots \int dP_1 \int d\mathbf{r}_0 W_f^{(n)}(P_m, \cdots, P_1, \mathbf{r}_0) \\ &\quad \times F(P_m, \cdots, P_1, \mathbf{r}_0) \end{aligned} \quad (4.3)$$

ここで、

$$W_f^{(n)}(P_m, \cdots, P_1, \mathbf{r}_0) = \frac{\partial W_f^{(n-1)}}{\partial a} + W_f^{(n-1)} W_f^{(1)} \quad (4.4)$$

である。 $W_f^{(n)}$ は、(4.4)式を用いて、 $W_f^{(1)}$ とその導関数から再帰的に計算することができ、次式のように表される。

$$\begin{aligned} W^{(n)} &= \frac{\partial^{n-1} W_f^{(1)}}{\partial a^{n-1}} + \binom{n-1}{1} \frac{\partial^{n-2} W_f^{(1)}}{\partial a^{n-2}} W^{(1)} + \cdots \\ &\quad + \binom{n-1}{n-2} \frac{\partial W_f^{(1)}}{\partial a} W^{(n-2)} + W^{(1)} W^{(n-1)} \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$= \frac{\partial^{n-1} W_f^{(1)}}{\partial a^{n-1}} + \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n-1}{i} \frac{\partial^{n-i-1} W_f^{(1)}}{\partial a^{n-i-1}} W^{(i)} \quad (4.6)$$

ここで、

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} \quad (4.7)$$

である。((4.6)式の導出については、本章の付録を参照。)



(4.3) 式をアナログモンテカルロ法によるタリースコアリング形式に変形すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial^n k_j}{\partial a^n} &= \frac{1}{\int dPS_{f,j}(P)} \sum_{m=1}^{\infty} \int dP_m \cdots \int dP_1 \int d\mathbf{r}_0 \\ &\times \left[ \sum_{\ell=1}^m W_f^{(n)}(P_\ell, \cdots, P_1, \mathbf{r}_0) p_f(P_\ell) \right] H(P_m, \cdots, P_1, \mathbf{r}_0) \end{aligned} \quad (4.8)$$

となり、更に、これを非アナログモンテカルロ法によるタリースコアリング形式に変形すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial^n k_j}{\partial a^n} &= \frac{1}{\int dPS_{f,j}(P)} \sum_{m=1}^{\infty} \int dP_m \cdots \int dP_1 \int d\mathbf{r}_0 \\ &\times \left[ \sum_{\ell=1}^m W_f^{(n)}(P_\ell, \cdots, P_1, \mathbf{r}_0) W_f(P_\ell, \cdots, P_1, \mathbf{r}_0) \right] \tilde{H}(P_\ell, \cdots, P_1, \mathbf{r}_0) \end{aligned} \quad (4.9)$$

となる。1 次や 2 次の微分係数の場合と同様、 $W_f^{(n)} W_f$  をスコアリングすることにより実効増倍率の  $n$  次微分係数を評価することができる。

源摂動効果を定量的に把握するため、(4.9) 式を源摂動を含まない項と源摂動のみを含む項に分割する。(3.97) 式や (3.101) 式で見たように、 $n-1$  次の重み係数が源摂動を含まない項と源摂動のみを含む項に分割されているとすると

$$W_f^{(n-1)} = W_{f,\text{NPS}}^{(n-1)} + W_{\text{PS},j}^{(n-1)} \quad (4.10)$$

である。これを (4.4) 式に代入し、

$$W_{f,\text{NPS}}^{(n)} = \frac{\partial W_{f,\text{NPS}}^{(n-1)}}{\partial a} + W_{f,\text{NPS}}^{(n-1)} W_{f,\text{NPS}}^{(1)} \quad (4.11)$$

$$W_{\text{PS},j}^{(n)} = \frac{\partial W_{\text{PS},j}^{(n-1)}}{\partial a} + W_{f,\text{NPS}}^{(1)} W_{\text{PS},j}^{(n-1)} + \left[ W_{f,\text{NPS}}^{(n-1)} + W_{\text{PS},j}^{(n-1)} \right] W_{\text{PS},j}^{(1)} \quad (4.12)$$

と定義すると、 $n$  次の重み係数も  $n-1$  次の重み係数と同じ形式で源摂動を含まない項と源摂動のみを含む項に分割することができ、(4.9) 式は以下のように表すことができる。

$$\frac{\partial^n k_j}{\partial a^n} = \frac{\partial^n k_{\text{NPS},j}}{\partial a^n} + \frac{\partial^n k_{\text{PS},j}}{\partial a^n} \quad (4.13)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^n k_{\text{NPS},j}}{\partial a^n} &= \frac{1}{\int dPS_{f,j}(P)} \sum_{m=1}^{\infty} \int dP_m \cdots \int dP_1 \int d\mathbf{r}_0 \\ &\times \left[ \sum_{\ell=1}^m W_{f,\text{NPS}}^{(n)}(P_\ell, \cdots, P_1, \mathbf{r}_0) W_f(P_\ell, \cdots, P_1, \mathbf{r}_0) \right] \tilde{H}(P_\ell, \cdots, P_1, \mathbf{r}_0) \end{aligned} \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^n k_{\text{PS},j}}{\partial a^n} &= \frac{1}{\int dPS_{f,j}(P)} \sum_{m=1}^{\infty} \int dP_m \cdots \int dP_1 \int d\mathbf{r}_0 \\ &\times \left[ \sum_{\ell=1}^m W_{\text{PS},j}^{(n)}(\mathbf{r}_0, E_1, \boldsymbol{\Omega}_1) W_f(P_\ell, \cdots, P_1, \mathbf{r}_0) \right] \tilde{H}(P_\ell, \cdots, P_1, \mathbf{r}_0) \end{aligned} \quad (4.15)$$

従って、1 次や 2 次微分係数と同様に、第  $j$  世代における、源摂動を含まない実効増倍率の  $n$  次微分係数は、

$$\text{Est} \left[ \frac{\partial^n k_{\text{NPS},j}}{\partial a^n} \right] = \frac{1}{N} \sum_{\ell} w_{f,\text{NPS},\ell}^{(n)} w_{f,\ell} \quad (4.16)$$

として評価することができる。ここで、 $w_{f,NPS,\ell}^{(n)}$  は、 $W_{f,NPS}^{(n)}$  のスコアリング値である。また、源摂動効果については、

$$\text{Est} \left[ \frac{\partial^n k_{PS,j}}{\partial a^n} \right] = \frac{1}{N} \sum_{\ell} w_{PS,j}^{(n)} w_{f,\ell} \quad (4.17)$$

により評価することができる。ここで、 $w_{PS,j}^{(n)}$  は、 $W_{PS,j}^{(n)}$  のスコアリング値である。 $w_{f,NPS,\ell}^{(n)}$  の計算方法と規格化条件については、次項で述べる。

#### 4.2.2 $n$ 次微分係数に対するスコアリング

本項では、 $n$  次微分係数に対するスコアリング値  $w_{f,\ell}^{(n)}$  が具体的にどのような量になるのかを考える。 $n$  次微分係数に対する重み係数は (4.6) 式で与えられ、これを計算するために必要な項は、 $\partial^i W_f^{(1)} / \partial a^i$  ( $i = 1, \dots, n-1$ ) である。以下では、この項について考える。

$W_f^{(1)}$  は (3.104) 式で表されるので、 $\partial^i W_f^{(1)} / \partial a^i$  は、一般的に

$$\begin{aligned} \frac{\partial^i}{\partial a^i} W_f^{(1)}(P_m, \dots, P_1, \mathbf{r}_0) = & \\ & \frac{\partial^{i+1}}{\partial a^{i+1}} \ln p_f(P_\ell) + \frac{\partial^{i+1}}{\partial a^{i+1}} \ln K_s(P_\ell \leftarrow P_{\ell-1}) + \dots + \frac{\partial^{i+1}}{\partial a^{i+1}} \ln K_s(P_2 \leftarrow P_1) \\ & + \frac{\partial^{i+1}}{\partial a^{i+1}} \ln T(P_1 \leftarrow \mathbf{r}_0) + \frac{\partial^{i+1}}{\partial a^{i+1}} \ln S_{f,j}(\mathbf{r}_0, E_1, \boldsymbol{\Omega}_1) \end{aligned} \quad (4.18)$$

となる。遷移カーネルの  $i+1$  次微分項については、更に、

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{i+1}}{\partial a^{i+1}} \ln K_s(P \leftarrow P') = & \\ & \frac{\partial^{i+1}}{\partial a^{i+1}} \ln T(\mathbf{r} \leftarrow \mathbf{r}', E, \boldsymbol{\Omega}) + \frac{\partial^{i+1}}{\partial a^{i+1}} \ln C_s(\mathbf{r}', E \leftarrow E', \boldsymbol{\Omega} \leftarrow \boldsymbol{\Omega}') \end{aligned} \quad (4.19)$$

となるので、 $i+1$  次の重み係数を評価するために必要な量は、 $p_f$ 、輸送カーネル、散乱カーネル、核分裂源の  $i+1$  次の微分項である。ここでは、 $p_f$ 、輸送カーネル、散乱カーネルについてのみ調べる。

まず、 $p_f$  について考察する。 $p_f$  は (2.138) 式で定義されるので、(4.18) 式の右辺第 1 項については

$$\frac{\partial^{i+1}}{\partial a^{i+1}} \ln p_f(\mathbf{r}, E) = \frac{\partial^{i+1}}{\partial a^{i+1}} \ln (\nu \Sigma_f(\mathbf{r}, E)) - \frac{\partial^{i+1}}{\partial a^{i+1}} \ln \Sigma_t(\mathbf{r}, E) \quad (4.20)$$

となる。

輸送カーネルについて考察する。粒子がある均質な摂動領域で飛行距離  $s$  だけ移動し、その領域内で衝突を起こしたとすると、輸送カーネルは (3.53) 式で表される。よって、

$$\frac{\partial^{i+1}}{\partial a^{i+1}} \ln T(\mathbf{r} \leftarrow \mathbf{r}', E, \boldsymbol{\Omega}) = \frac{\partial^{i+1}}{\partial a^{i+1}} \ln \Sigma_t - \frac{\partial^{i+1} \Sigma_t}{\partial a^{i+1}} s \quad (4.21)$$

となる。中性子が、図 3.2 で示されるように 2 領域にまたがって飛行した場合、輸送カーネルは (3.56) 式で表されるので、重み係数は

$$\frac{\partial^{i+1}}{\partial a^{i+1}} \ln T(\mathbf{r} \leftarrow \mathbf{r}', E, \boldsymbol{\Omega}) = \frac{\partial^{i+1}}{\partial a^{i+1}} \ln \Sigma_{t,2} - \left( \frac{\partial^{i+1} \Sigma_{t,2}}{\partial a^{i+1}} s_2 + \frac{\partial^{i+1} \Sigma_{t,1}}{\partial a^{i+1}} s_1 \right) \quad (4.22)$$

となる。一般に、 $n$  領域にまたがって飛行した場合、輸送カーネルは (3.59) 式で表されるので、重み係数は、

$$\frac{\partial^{i+1}}{\partial a^{i+1}} \ln T(\mathbf{r} \leftarrow \mathbf{r}', E, \boldsymbol{\Omega}) = \frac{\partial^{i+1}}{\partial a^{i+1}} \ln \Sigma_{t,n} - \sum_{\ell=1}^n \left( \frac{\partial^{i+1} \Sigma_{t,\ell}}{\partial a^{i+1}} s_\ell \right) \quad (4.23)$$

となる。ここで、 $\ell$  は領域インデックスである。以上より、輸送カーネルに対する重み係数は

$$\begin{aligned} \text{ある領域で距離 } s \text{ 飛行したとき} &\Rightarrow -\frac{\partial^{i+1} \Sigma_t}{\partial a^{i+1}} s \\ \text{衝突したとき} &\Rightarrow \frac{\partial^{i+1}}{\partial a^{i+1}} \ln \Sigma_t \end{aligned}$$

をスコアリングすればよいことが分かる。

散乱カーネルの重み係数について考察する。衝突核種と散乱タイプを選択する必要のない多群モンテカルロ法の場合、散乱カーネルは (3.61) 式で表されるので、重み係数は

$$\frac{\partial^{i+1}}{\partial a^{i+1}} \ln C_s(\mathbf{r}, E \leftarrow E', \boldsymbol{\Omega} \leftarrow \boldsymbol{\Omega}') = \frac{\partial^{i+1}}{\partial a^{i+1}} \ln \Sigma_s - \frac{\partial^{i+1}}{\partial a^{i+1}} \ln \Sigma_t \quad (4.24)$$

となる。衝突核種と散乱タイプを選択する必要がある連続エネルギーモンテカルロ法の場合、重み係数は

$$\frac{\partial^{i+1}}{\partial a^{i+1}} \ln C_{s,x}^k(\mathbf{r}, E \leftarrow E', \boldsymbol{\Omega} \leftarrow \boldsymbol{\Omega}') = \frac{\partial^{i+1}}{\partial a^{i+1}} \ln \Sigma_x^k + \frac{\partial^{i+1}}{\partial a^{i+1}} \ln(\nu_x^k f_x^k) - \frac{\partial^{i+1}}{\partial a^{i+1}} \ln \Sigma_t \quad (4.25)$$

となる。衝突解析により、散乱核種  $k = \kappa$ 、散乱タイプ  $x = \eta$  が決まると

$$\frac{\partial^{i+1}}{\partial a^{i+1}} \ln C_{s,\eta}^\kappa(\mathbf{r}, E \leftarrow E', \boldsymbol{\Omega} \leftarrow \boldsymbol{\Omega}') = \frac{\partial^{i+1}}{\partial a^{i+1}} \ln \Sigma_\eta^\kappa + \frac{\partial^{i+1}}{\partial a^{i+1}} \ln(\nu_\eta^\kappa f_\eta^\kappa) - \frac{\partial^{i+1}}{\partial a^{i+1}} \ln \Sigma_t \quad (4.26)$$

となり、散乱カーネルに対する重み係数は、(4.26) 式から求められる。

遷移カーネルに対する重み係数は、輸送カーネルと散乱カーネルの重み係数をまとめると、断面積が均質なある領域において距離  $s$  飛行したとき

$$-s \frac{\partial^{i+1}}{\partial a^{i+1}} \ln \Sigma_t = -s \sum_k \left( \frac{\partial^{i+1}}{\partial a^{i+1}} \ln \sigma_t^k + \frac{\partial^{i+1}}{\partial a^{i+1}} \ln N^k \right) \quad (4.27)$$

$$= -s \sum_k \left( \frac{1}{\sigma_t^k} \frac{\partial^{i+1}}{\partial a^{i+1}} \ln \sigma_t^k + \frac{1}{N^k} \frac{\partial^{i+1}}{\partial a^{i+1}} \ln N^k \right) \Sigma_t^k \quad (4.28)$$

をスコアリングし、核種  $\kappa$  と衝突し、散乱タイプ  $\eta$  で散乱したとき

$$\frac{\partial^{i+1}}{\partial a^{i+1}} \ln \Sigma_\eta^\kappa + \frac{\partial^{i+1}}{\partial a^{i+1}} \ln(\nu_\eta^\kappa f_\eta^\kappa) = \frac{\partial^{i+1}}{\partial a^{i+1}} \ln \sigma_\eta^\kappa + \frac{\partial^{i+1}}{\partial a^{i+1}} \ln N^k + \frac{\partial^{i+1}}{\partial a^{i+1}} \ln(\nu_\eta^\kappa f_\eta^\kappa) \quad (4.29)$$

をスコアリングすればよい。(4.28) 式と (4.29) 式から分かるように、 $n$  次の微分係数を評価するためにスコアリングすべき量は、 $\partial^i \ln \sigma_\eta^\kappa / \partial a^i$ 、 $\partial^i \ln N^k / \partial a^i$ 、 $\partial^i \ln(\nu_\eta^\kappa f_\eta^\kappa) / \partial a^i$  ( $i = 1, \dots, n-1$ ) である。



#### 4.2.3 核分裂源の $n$ 次微分係数に対するスコアリング

3.3.4 項では核分裂源の 1 次微分係数についてのみ考察したが、(4.18) 式から分かるように、一般には核分裂源の高次微分係数が存在する。ここでは、核分裂源の高次微分係数のスコアリング値について考察する。

まず、3.3.4 項において、源摂動の 1 次微分係数に対する規格化条件式 (3.76) 式を導出したように、源摂動の  $n$  次微分係数に対する規格化条件式を導出する。通常の源反復における規格化条件式である (2.194) 式を以下のように書き直す。

$$k_j S_{f,j+1}(P) = \int dP' \mathcal{K}_F(P \leftarrow P') S_{f,j}(P') \quad (4.30)$$

この式を  $a$  について  $n$  回微分すると

$$\frac{\partial^n}{\partial a^n} (k_j S_{f,j+1}(P)) = \int dP' \frac{\partial^n}{\partial a^n} (\mathcal{K}_F(P \leftarrow P') S_{f,j}(P')) \quad (4.31)$$

であり、左辺を展開すると

$$\begin{aligned} S_{f,j+1}(P) \frac{\partial^n k_j}{\partial a^n} + \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i} \frac{\partial^i}{\partial a^i} S_{f,j+1}(P) \frac{\partial^{n-i} k_j}{\partial a^{n-i}} + k_j \frac{\partial^n}{\partial a^n} S_{f,j+1}(P) \\ = \int dP' \frac{\partial^n}{\partial a^n} (\mathcal{K}_F(P \leftarrow P') S_{f,j}(P')) \end{aligned} \quad (4.32)$$

となる。 $\partial^n S_{f,j+1} / \partial a^n$  について整理すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial^n}{\partial a^n} S_{f,j+1}(P) = \frac{1}{k_j} \left\{ \int dP' \frac{\partial^n}{\partial a^n} (\mathcal{K}_F(P \leftarrow P') S_{f,j}(P')) \right. \\ \left. - \frac{1}{k_j} \frac{\partial^n k_j}{\partial a^n} \int dP' \mathcal{K}_F(P \leftarrow P') S_{f,j}(P') - \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i} \frac{\partial^i}{\partial a^i} S_{f,j+1}(P) \frac{\partial^{n-i} k_j}{\partial a^{n-i}} \right\} \end{aligned} \quad (4.33)$$

となる。ここで、 $S_{f,j+1}$  については、(2.194) 式を代入した。(4.33) 式が、源摂動の  $n$  次微分係数に対する規格化条件式であり、1 次から  $n-1$  次までの源摂動の微分係数が求まっているならば、右辺は評価することができる。

第  $j$  世代のヒストリーの追跡がすべて終了すると、(4.33) 式は以下のように評価することができる。

$$\begin{aligned} \text{Est}_N \left[ \frac{\partial^n}{\partial a^n} S_{f,j+1}(P) \right] \\ = \frac{N}{\sum_{\ell} w_{f,\ell}} \left( w_{f,\ell}^{(n)} w_{f,\ell} - \frac{N}{\sum_{\ell} w_{f,\ell}} \frac{\sum_{\ell} w_{f,\ell}^{(n)} w_{f,\ell}}{N} w_{f,\ell} - \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i} w_{\text{PS},j+1}^{(i)} \frac{\sum_{\ell} w_{f,\ell}^{(n-i)} w_{f,\ell}}{N} \right) \\ = \frac{N}{\sum_{\ell} w_{f,\ell}} \left( w_{f,\ell}^{(n)} w_{f,\ell} - \frac{w_{f,\ell}}{\sum_{\ell} w_{f,\ell}} \sum_{\ell} w_{f,\ell}^{(n)} w_{f,\ell} - \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i} w_{\text{PS},j+1}^{(i)} \frac{\sum_{\ell} w_{f,\ell}^{(n-i)} w_{f,\ell}}{N} \right) \end{aligned} \quad (4.34)$$

ここで、 $w_{f,\ell}^{(i)}$  は  $W_f^{(i)}$  のスコアリング値である。2.6.5 項で見たように、 $w_{f,\ell}$  を  $n_{f,\ell}\bar{w}_f$  に置き換えると、

$$\begin{aligned}
& \text{Est}_N \left[ \frac{\partial^n}{\partial a^n} S_{f,j+1}(P) \right] \\
&= \frac{N}{\sum_{\ell} n_{f,\ell} \bar{w}_f} \left( w_{f,\ell}^{(n)} n_{f,\ell} \bar{w}_f - \frac{n_{f,\ell} \bar{w}_f}{\sum_{\ell} n_{f,\ell} \bar{w}_f} \sum_{\ell} w_{f,\ell}^{(n)} n_{f,\ell} \bar{w}_f - \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i} w_{\text{PS},j+1}^{(i)} \frac{\sum_{\ell} w_{f,\ell}^{(n-i)} n_{f,\ell} \bar{w}_f}{N} \right) \\
&= \frac{N n_{f,\ell}}{\sum_{\ell} n_{f,\ell}} \left( w_{f,\ell}^{(n)} - \frac{\sum_{\ell} n_{f,\ell} w_{f,\ell}^{(n)}}{\sum_{\ell} n_{f,\ell}} - \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i} w_{\text{PS},j+1}^{(i)} \frac{\sum_{\ell} w_{f,\ell}^{(n-i)} n_{f,\ell}}{N n_{f,\ell}} \right) \quad (4.35)
\end{aligned}$$

と表すことができる。また、(2.203) 式より

$$\text{Est}_N [S_{f,j+1}(P)] = \frac{n_{f,\ell}}{\sum_{\ell} n_{f,\ell}} N \quad (4.36)$$

であるから、

$$w_{\text{PS},j+1}^{(n)} = \text{Est}_N \left[ \frac{1}{S_{f,j+1}(P)} \frac{\partial}{\partial a} S_{f,j+1}(P) \right] \quad (4.37)$$

$$= w_{f,\ell}^{(n)} - \frac{\sum_{\ell} n_{f,\ell} w_{f,\ell}^{(n)}}{\sum_{\ell} n_{f,\ell}} - \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i} w_{\text{PS},j+1}^{(i)} \frac{\sum_{\ell} w_{f,\ell}^{(n-i)} n_{f,\ell}}{N n_{f,\ell}} \quad (4.38)$$

となる。陽には示していないが、(4.38) 式の右辺の値は、 $w_{\text{PS},j+1}^{(i)}$  以外、すべて第  $j$  世代のランダムウォークの結果から得られるものであり、 $w_{\text{PS},j+1}^{(i)}$  については、 $n=1$  に対する (3.80) 式と (4.38) 式を用いて再帰的に計算することができる。従って、微分演算子サンプリング法に対する源摂動微分量の重み係数  $w_{\text{PS},j+1}^{(n)}$  は、第  $j$  世代の源摂動微分量の重み係数  $w_{f,\ell}^{(n)}$  を (3.80) 式で規格化することによって得られる。

#### 4.2.4 誤差評価

3.3.8 項で述べた評価手法と同様にして、高次の微分係数についても以下の式で誤差を評価する。

$$E \left[ \frac{\partial^n k}{\partial a^n} \right] = \frac{1}{N - N_{\text{skip}}} \sum_{j=N_{\text{skip}}+1}^N \text{Est} \left[ \frac{\partial^n k_j}{\partial a^n} \right] \quad (4.39)$$

ここで、 $E[\partial^n k / \partial a^n]$  は  $\partial^n k / \partial a^n$  の平均値である。

このとき、分散は以下のようにして評価する。

$$\sigma^2 \left[ \frac{\partial^n k}{\partial a^n} \right] = \frac{1}{N - N_{\text{skip}} - 1} \left( \frac{1}{N - N_{\text{skip}}} \sum_{j=N_{\text{skip}}+1}^N \left( \text{Est} \left[ \frac{\partial^n k_j}{\partial a^n} \right] \right)^2 - E^2 \left[ \text{Est} \left[ \frac{\partial^n k}{\partial a^n} \right] \right] \right) \quad (4.40)$$

ここで、 $\sigma[\partial^n k / \partial a^n]$  は、 $\partial^n k / \partial a^n$  に対する標準偏差を表す。本研究では、バッチ間の相関は考慮していない。また、反応度を評価する際、次数の異なる微分係数間の相関も無視している。この相関は、1回のモンテカルロ計算で各次数の微分係数を評価することから生じるものである。

### 4.3 ベンチマーク計算

Godiva 炉心、Jezebel 炉心、TCA 炉心に対してベンチマーク計算を行う。最初の2つは、それぞれ、ウラン燃料高速炉体系とプルトニウム燃料高速炉体系である。TCA 炉心は熱炉体系である。評価済み核データは、すべての計算において、JENDL-3.3 [52] を用いた。

#### 4.3.1 Godiva 炉心

臨界安全ベンチマーク実験ハンドブック (ICSBEP handbook) [53] の HEU-MET-FAST-001 で示されているベンチマークモデルを用いた。体系は、半径 8.741 cm の裸のウラン球体系で、燃料組成は、U-235 が 93.71 wt%、U-238 が 5.27 wt% U-234 が 1.02 wt% である。摂動は、中心領域半径 1 cm を完全にボイド化することによって加え、そのときの反応度値を計算した。実際には、このような実験は行われておらず、仮想的なベンチマーク問題である。

参照解は、非摂動系と摂動系で2回モンテカルロ計算を実行し、実効増倍率の差から反応度値を計算した。参照解に対しては、バッチサイズ1万ヒストリー、スキップバッチ数100、有効バッチ数4万で計算を行った。一方、摂動計算は、バッチサイズ1万ヒストリー、スキップバッチ数100、有効バッチ数4,000で計算を行い、1回の固有値計算で4次までの微分係数をすべて計算した。

表 4.1 は、Godiva 中心ボイド化摂動問題に対して参照解と微分演算子サンプリング法による結果を比較したものである。源摂動効果を考慮しない場合、参照解と大きな差異を生じることが分かる。源摂動を考慮した場合、Taylor 級数1次近似では、負の反応度値を多少過

表 4.1: Godiva 炉心に対するボイド反応度値 (完全ボイド化) を計算したときの参照解と微分演算子サンプリング法による結果の比較

反応度値 ( $10^{-3} \Delta k / k'$ )		
参照解	-2.883(0.042)*	
Taylor 級数	源摂動効果考慮せず	源摂動効果考慮
1 次まで	-1.291(0.020)	-3.044(0.054)
2 次まで	-1.352(0.023)	-2.803(0.068)
3 次まで	-1.346(0.023)	-2.861(0.078)
4 次まで	-1.350(0.023)	-2.850(0.085)

\* 括弧内の値は1標準偏差の統計誤差を表す。



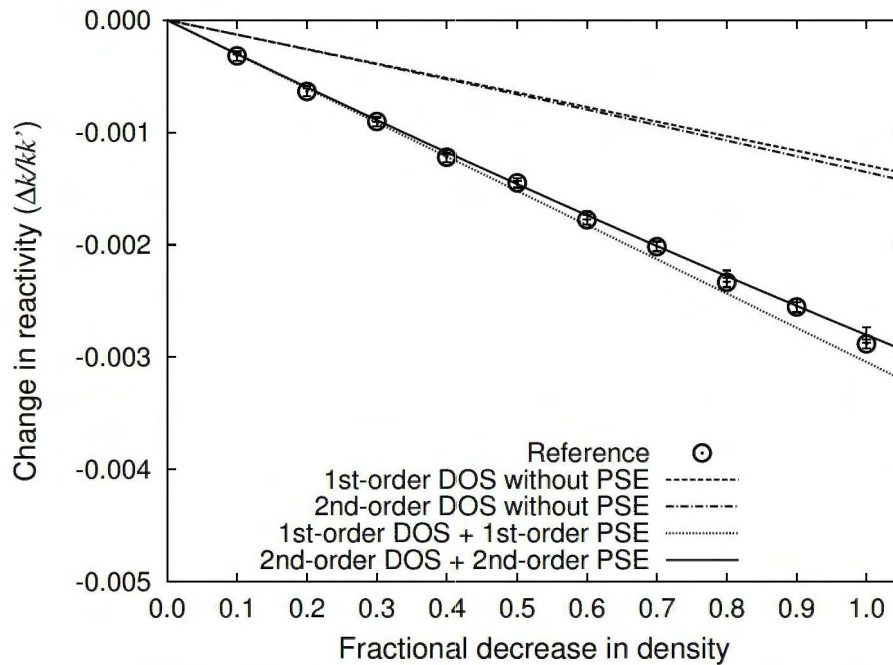


図 4.1: Godiva 炉心中心ボイド摂動問題に対してボイド率を変化させたときの参照解と微分演算子サンプリング法による結果の比較 (DOS: Differential Operator Sampling, PSE: Perturbed Source Effect)

大評価する。即ち、1 標準偏差の誤差範囲内では一致しないが、2 標準偏差を考えると参照解と一致する。Taylor 級数 2 次近似を用いると、1 次近似と比べて計算結果はよくなり、参照解と 1 標準偏差の範囲内で一致する。3 次以上の Taylor 級数近似を用いると、参照解とは 1% 以内の精度で一致する。Godiva 炉心に対するこの摂動問題の場合、源摂動効果を考慮し、Taylor 級数 2 次近似で十分精度のよい結果が得られることが分かった。

ボイド化率に対する Taylor 級数 1 次近似と 2 次近似の適用性を調べるために、密度変化に対する反応度価値を計算した。図 4.1 は、Godiva 炉心中心ボイド摂動に対してボイド率を段階的に変化させたときの参照解と微分演算子サンプリング法による結果の比較を表している。

源摂動を考慮した Taylor 級数 1 次近似は、50% ぐらいの密度減少までは適用可能であるが、それ以上の密度減少になると参照解との差異が徐々に大きくなる。一方、源摂動を考慮し Taylor 級数 2 次近似は、完全にボイド化 (100% ボイド) の場合でも適用可能であることが分かる。

#### 4.3.2 Jezebel 炉心

本項では、Jezebel 炉心において Pu-238 サンプル置換測定実験に対するベンチマーク計算を行う。この実験は、ICSBEP ハンドブックに SPEC-MET-FAST-002 として記載されている。炉心は、半径 6.6595 cm の裸のプルトニウム球体系である。燃料組成は、Pu-239 が 76.4 at%、Pu-240 が 20.1 at%、Pu-241 が 3.1 at%、Pu-242 が 0.4 at% である。炉心中心に半径

0.6439 cm の Pu-238 サンプルが置かれており、このサンプルを取り除いたときの反応度価値を計算する。

参照解は、独立なモンテカルロ計算を 2 回実行し、非摂動系と摂動系の実効増倍率の差から反応度を計算した。参照解のモンテカルロ計算は、バッチサイズ 1 万ヒストリー、スキップバッチ 100、有効バッチ 16 万で行った。一方、モンテカルロ法による摂動計算については、バッチサイズ 1 万ヒストリー、スキップバッチ 100、有効バッチ 1 万で行った。モンテカルロ摂動計算では、1 回の計算で各次数の微分係数及び源摂動の微分係数を計算した。

表 4.2 は、Jezebel 炉心サンプル反応度価値問題に対して参照解と微分演算子サンプリング法による結果を比較したものである。Jezebel 炉心サンプル反応度価値問題の場合も、Godiva 中心ボイド化摂動問題とほぼ同様の傾向が見られることが分かる。源摂動効果を考慮することは必須であり、2 次以上の Taylor 級数近似は非常によい結果を与え、参照解とは 1 標準偏差の範囲内で一致し、差異は 1% 以下である。

ICSBEF ハンドブックによると、実験値は  $1.461(\pm 0.109) \times 10^{-3} \Delta k/k'$  である。 $\beta_{\text{eff}}$  は、 $0.00204 \pm 0.00011$  で、この値が単位変換に用いられている。実験誤差が大きいため、源摂動効果を考慮した Taylor 級数 1 次近似でも実験値と一致している。本研究では、評価済み核データの妥当性評価の検討は行わないが、微分演算子サンプリング法を用いた反応度価値計算手法はそのための有用なツールとなりうる。

図 4.2 は、Jezebel 炉心サンプル反応度価値問題に対してボイド率を段階的に変化させたときの参照解と Taylor 級数 1 次と 2 次近似結果の比較を表している。Taylor 級数 2 次近似は完全ボイド化 (100% の密度減少) に対しても適用可能であるが、Taylor 級数 1 次近似は密度減少割合が大きくなるにつれて、参照解の反応度価値の絶対値を過大評価する傾向が見られる。

表 4.2: Jezebel 炉心に対するサンプル反応度価値を計算したときの参照解と微分演算子サンプリング法による結果の比較

反応度価値 ( $10^{-3} \Delta k/k'$ )		
参照解	-1.392(0.021)*	
Taylor 級数	源摂動効果考慮せず	源摂動効果考慮
1 次まで	-0.742(0.007)	-1.470(0.020)
2 次まで	-0.767(0.007)	-1.382(0.022)
3 次まで	-0.767(0.007)	-1.391(0.022)
4 次まで	-0.767(0.007)	-1.391(0.022)

\* 括弧内の値は 1 標準偏差の統計誤差を表す。



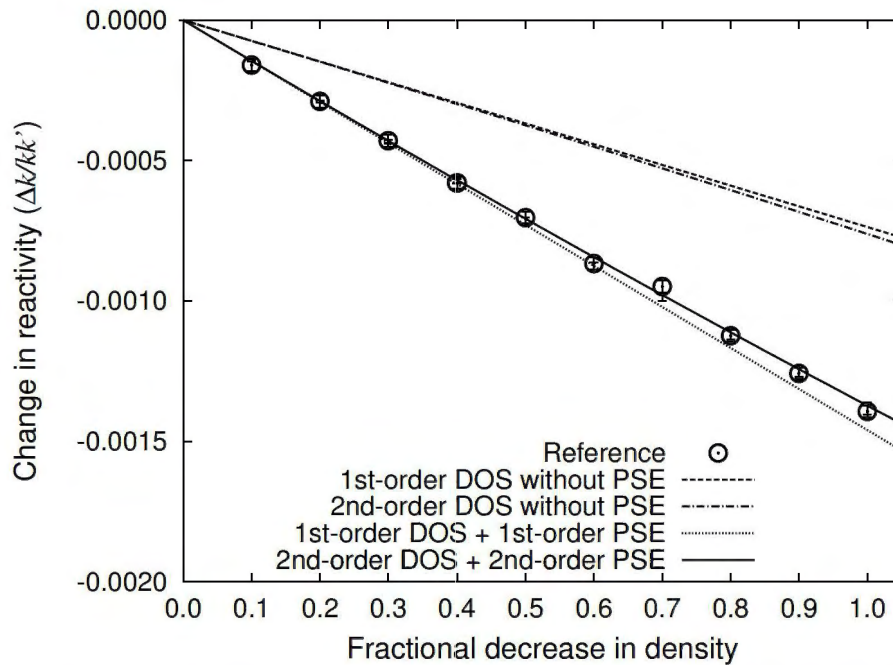


図 4.2: Jezebel 炉心サンプル反応度価値問題に対してボイド率を変化させたときの参照解と微分演算子サンプリング法による結果の比較 (DOS: Differential Operator Sampling, PSE: Perturbed Source Effect)

#### 4.3.3 TCA 炉心

軽水臨界実験装置 (TCA) において、Np-237 サンプル反応度価値測定実験が行われた [54]。実験の行われた TCA 体系は、軽水減速 2.6 wt%濃縮の  $\text{UO}_2$  格子体系である [51]。サンプル反応度価値は、様々な水対燃料体積比の炉心で測定された。ベンチマーク体系として、水対燃料体積比が 3.0 の体系を選択した。この体系を選択したのは、測定された反応度価値が 20 セント以上 ( $>0.0015\Delta k/k'$ ) で、モンテカルロ法の直接計算による参照解が比較的小さな統計誤差で計算できるからである。図 4.3 にこのベンチマーク問題の計算体系を示す。体系において実験チャンネル (サンプルが挿入されるチューブ) とサンプルは、陽にモデル化されている。ここでいうサンプルとは、 $\text{NpO}_2$  サンプルとそれを被覆しているステンレス鋼スリーブを含めたものを指し、このサンプルが挿入されているときと挿入されていないときの反応度差を、サンプル反応度価値として計算する。TCA 体系と測定実験についての詳細な情報は、それぞれ、参考文献 [51] と [54] を参照されたい。

参照解は、独立なモンテカルロ計算を 2 回実行し、非摂動系と摂動系の実効増倍率の差から反応度を計算した。参照解のモンテカルロ計算は、バッチサイズ 64,000 ヒストリー、スキップバッチ 100、有効バッチ 10 万で行った。一方、モンテカルロ法による摂動計算については、バッチサイズ 64,000 ヒストリー、スキップバッチ 100、有効バッチ 8,000で行った。モンテカルロ摂動計算では、1 回の計算で各次数の微分係数及び源摂動の微分係数を計算した。

表 4.3 は、TCA 炉心の Np-237 サンプル反応度価値に対して参照解と微分演算子サンプリング法による結果を比較したものである。このベンチマーク問題に対して、Taylor 級数項は



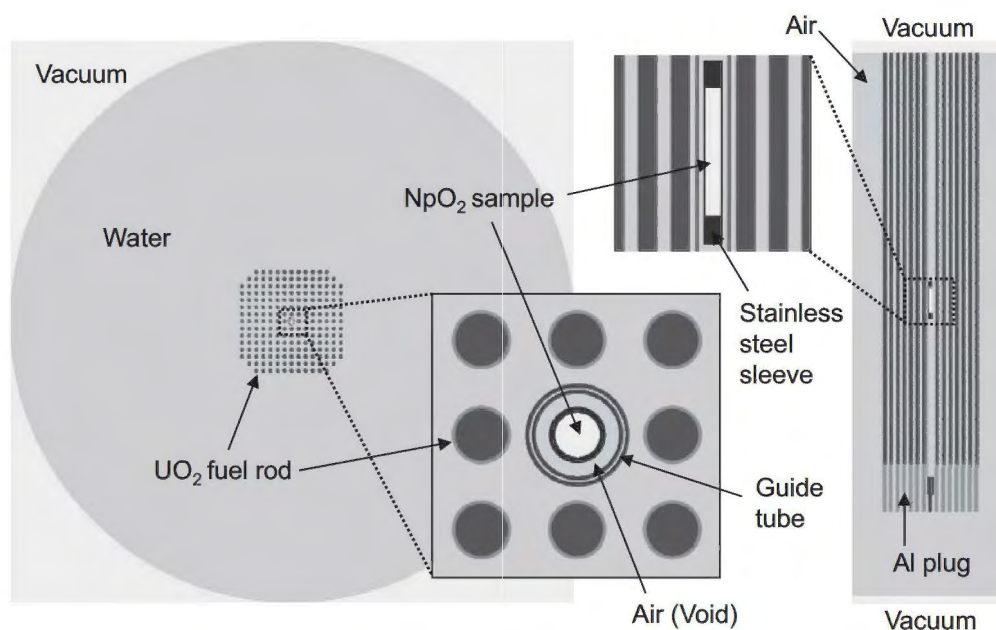


図 4.3: TCA 炉心に対する計算体系

表 4.3: TCA 炉心に対する Np-237 サンプル反応度値を計算したときの参照解と微分演算子サンプリング法による結果の比較

反応度値 ( $10^{-3}\Delta k/k'$ )		
参照解	1.754(0.014)*	
Taylor 級数	源摂動効果考慮せず	源摂動効果考慮
1 次まで	0.511(0.004)	0.793(0.013)
2 次まで	0.754(0.005)	1.194(0.017)
3 次まで	0.872(0.006)	1.385(0.021)
4 次まで	0.932(0.007)	1.494(0.025)
5 次まで	0.961(0.008)	1.552(0.029)
6 次まで	0.975(0.009)	1.563(0.033)
7 次まで	0.980(0.009)	1.579(0.038)
8 次まで	0.982(0.010)	1.562(0.042)

\* 括弧内の値は 1 標準偏差の統計誤差を表す。

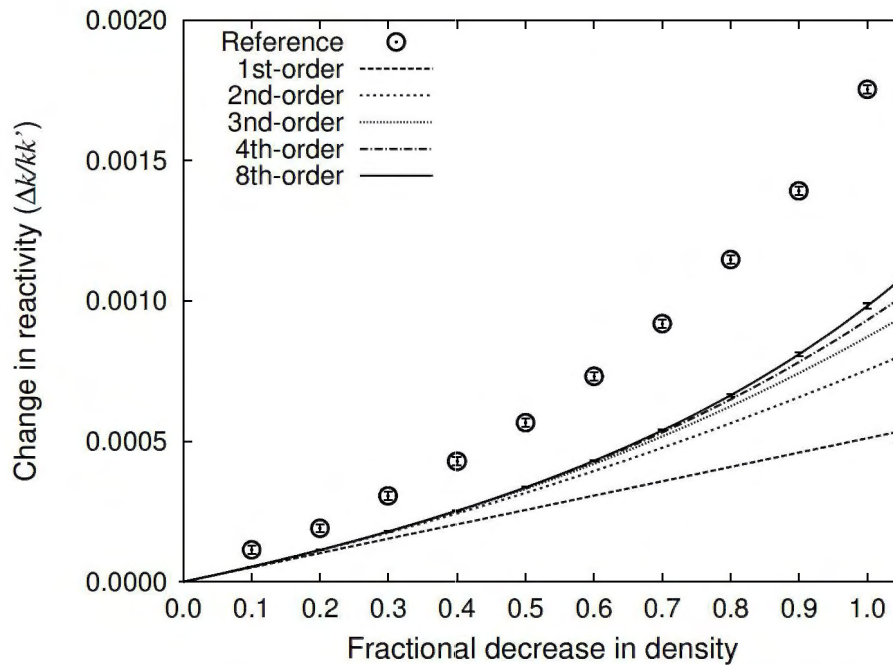


図 4.4: TCA 炉心のサンプル反応度価値問題に対してサンプル密度を変化させたときの参照解と微分演算子サンプリング法による結果の比較 (源摂動効果を考慮していない場合)

8 次まで計算し、源摂動効果についても 8 次まで計算した。源摂動効果の 6 次以上の微分係数については、源反復回数を増加させるにつれて値が大きく変動し、統計誤差も 100% 以上となったため、信頼性のある結果は得られなかった。源摂動効果を含む Taylor 級数 2 次近似は Godiva 炉心や Jezebel 炉心で有効であったが、その手法でも、この摂動問題では、約 30% ほど参照解を過小評価している。Taylor 級数高次項を考慮すれば参照解に近づいていくが、比較的小さな統計誤差で計算できた Taylor 級数 5 次近似でもまだ約 11% の差異を生じる。この TCA 摂動問題の場合、反応度価値を正確に計算するためには、源摂動効果を含めた高次の Taylor 級数項を考慮することが不可欠である。

微分演算子サンプリング法を用いた Taylor 級数近似の適用性を調べるために、サンプル密度を段階的に減少させたときの参照解と Taylor 級数近似解の比較した。図 4.4 は、源摂動効果を含まない場合の比較を示しており、高次項まで小さな統計誤差で計算はできているものの、参照解との差異は大きく、密度減少割合が大きくなるにつれて徐々に差異は大きくなる。図 4.5 は、源摂動効果を含む場合の比較を示しており、Taylor 級数 3 次近似や 4 次近似は、密度減少割合が 50% ぐらいまでは、参照解と良く一致している。しかしながら、それ以上の減少割合については、Taylor 級数 5 次近似でも参照解との差異が見られ、その差異は密度減少割合とともに大きくなる。以上の結果より、6 次以上の高次の項を精度良く計算する必要があることが分かる。

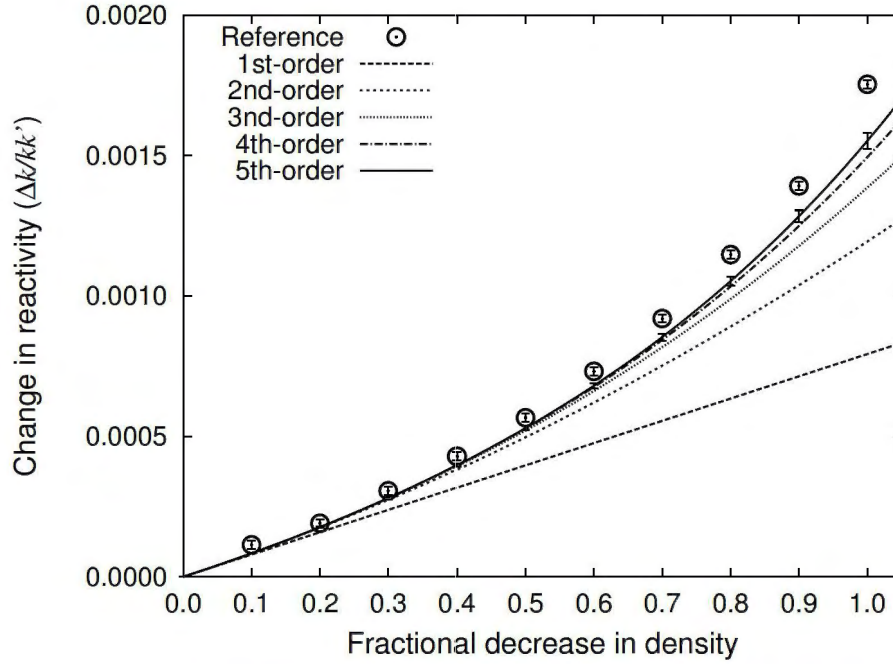


図 4.5: TCA 炉心のサンプル反応度価値問題に対してサンプル密度を変化させたときの参照解と微分演算子サンプリング法による結果の比較 (源摂動効果を考慮した場合)

## 4.4 代替アプローチ

前節までの結果から、TCA 摂動問題に対し、通常の Taylor 級数近似ではサンプル反応度価値を精度良く計算するのが難しいことが分かった。この困難を緩和するために、本節では、Padé 近似 [55]、中央点法 (midpoint method)、中間点法 (interpoint method) の 3 つの代替アプローチを検討する。中央点法と中間点法は、非摂動系の密度 (基準密度) を変化割合の途中にとる手法で、密度変化を減少させることができ、計算精度が向上することが期待される。

### 4.4.1 Padé 近似

実効増倍率  $k$  が摂動パラメータの変化量  $x = \Delta a$  の関数であるとする。このとき、 $x = 0$  における  $k(x)$  の Taylor 級数は以下のように表される。

$$k(x) = k(0) + k'(0)x + \frac{1}{2}k''(0)x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}k^{(n)}(0)x^n + \cdots \quad (4.41)$$

Padé 近似を用いると、 $k(x)$  は以下のような有理関数として表すことができる。

$$R[L/M](x) = \frac{p_0 + p_1x + p_2x^2 + \cdots + p_Lx^L}{1 + q_1x + q_2x^2 + \cdots + q_Mx^M} \quad (4.42)$$



(4.41) 式を有理関数形式に変換できるためには、以下の条件が満たされていなければならない。

$$R[L/M](0) = k(0), \quad (4.43)$$

$$\left. \frac{d^k}{dx^k} R[L/M](x) \right|_{x=0} = \left. \frac{d^k}{dx^k} k(x) \right|_{x=0} \quad \text{for } k = 1, 2, \dots, L+M \quad (4.44)$$

2 次の Taylor 級数近似は、[1/1] Padé 近似を用いて以下のように書き表すことができる。

$$k(0) + k'(0)x + \frac{1}{2}k''(0)x^2 \approx \frac{p_0 + p_1x}{1 + q_1x} \quad (4.45)$$

ここで、係数  $p_0, p_1, q_1$  は、(4.43) 式と (4.44) 式から求めることができる。よって、 $k$  の変化量は以下のように表される。

$$\begin{aligned} \Delta k &= R[1/1](x) - R[1/1](0) \\ &= \frac{(p_1 - p_0q_1)x}{1 + q_1x} = \frac{k'(0)\Delta a}{1 - \frac{k''(0)}{2k'(0)}\Delta a} \end{aligned} \quad (4.46)$$

同様にして、4 次の Taylor 級数近似は、[2/2] Padé 近似で書き表すことができる。

$$k(0) + k'(0)x + \frac{1}{2}k''(0)x^2 + \frac{1}{3!}k'''(0)x^3 + \frac{1}{4!}k^{(4)}(0)x^4 \approx \frac{p_0 + p_1x + p_2x^2}{1 + q_1x + q_2x^2} \quad (4.47)$$

$k$  の変化量は以下のように表される。

$$\begin{aligned} \Delta k &= R[2/2](x) - R[2/2](0) \\ &= \frac{c_1\Delta a + c_2(\Delta a)^2}{1 + q_1\Delta a + q_2(\Delta a)^2}, \end{aligned} \quad (4.48)$$

$$c_1 = p_1 - p_0q_1 = k'(0), \quad (4.49)$$

$$c_2 = p_2 - p_0q_2 = q_1k'(0) + \frac{1}{2}k''(0), \quad (4.50)$$

$$q_1 = \frac{2k'''(0)k'(0) - 6k^{(4)}(0)k'(0)}{4k'''(0)k'(0) - 6(k''(0))^2}, \quad (4.51)$$

$$q_2 = \frac{4(k'''(0))^2 - 3k^{(4)}(0)k''(0)}{36(k''(0))^2 - 24k'(0)k'''(0)} \quad (4.52)$$

図 4.6 は、2 次の Taylor 級数近似と [1/1] Padé 近似による結果を比較したものであり、図 4.7 は、4 次の Taylor 級数近似と [2/2] Padé 近似による結果を比較したものである。これらの図から分かるように、Padé 近似は、それに対応した Taylor 級数近似に比べて良い結果を与える。特に、[1/1] Padé 近似は、2 次の Taylor 級数近似による結果を大きく改善する。どちらの手法も実効増倍率の 2 次微分係数から反応度価値を計算しているが、Padé 近似は、比較的大きな密度減少割合に対しても良好な結果を与える。加えて、低次の Padé 近似は、高次の Taylor 級数近似の結果とほぼ同等の結果を与える。これは、Taylor 級数近似が高次項

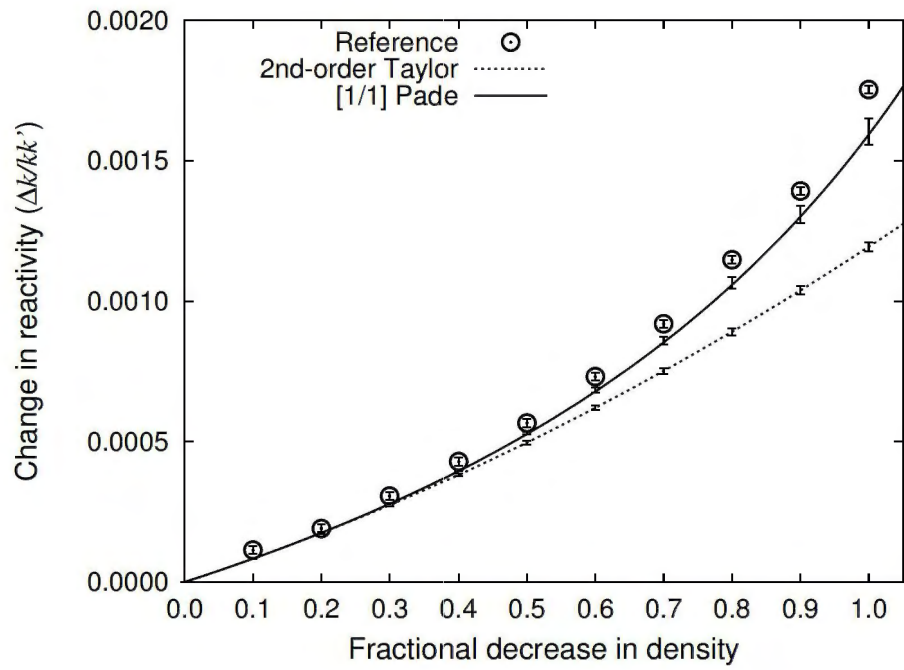


図 4.6: TCA 炉心のサンプル反応度値問題に対する Taylor 級数 2 次近似と [1/1] Padé 近似の比較

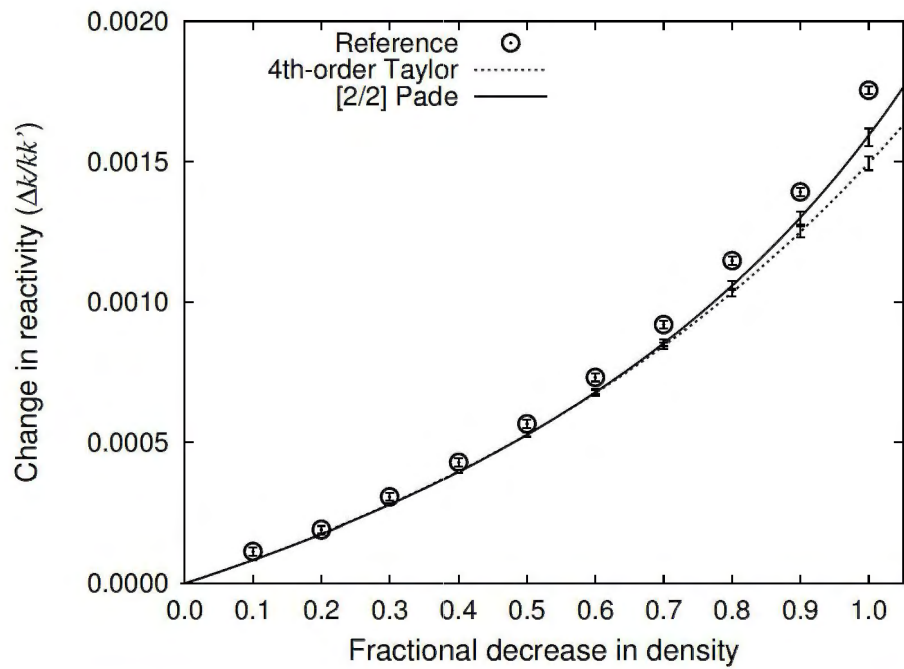


図 4.7: TCA 炉心のサンプル反応度値問題に対する Taylor 級数 4 次近似と [2/2] Padé 近似の比較

表 4.4: TCA 炉心に対する Np-237 サンプル反応度値を計算したときの参照解と Padé 近似解の比較

反応度値 ( $10^{-3}\Delta k/kk'$ )	
参照解	1.754(0.014)*
Taylor 級数 2 次近似	1.194(0.017)**
Taylor 級数 4 次近似	1.494(0.025)
[1/1] Padé 近似	1.603(0.047)
[2/2] Padé 近似	1.587(0.032)

\* 括弧内の値は 1 標準偏差の統計誤差を表す。

\*\* すべての計算結果は源振動効果を含む。

を完全に無視してしまうのに対して、Padé 近似が (4.42) 式で表わされるような有理数近似であることから、ある程度の高次項の効果を考慮しているからであると考えられる。しかしながら、表 4.4 に示されるように、完全にボイド化 (100%密度減少) した場合、参照解とまだ 10%程度の差異がある。

#### 4.4.2 中央点法と中間点法

中間点法は、サンプルが挿入されているときのサンプル密度割合 (100%) と完全に引き抜かれた場合のサンプル密度割合 (0%) の中間点を基準計算として反応度を計算する手法である。即ち、基準点から正と負の反応度値を同時に計算する。このとき、正と負の反応度値は以下のように表される。

$$\begin{aligned}\Delta k^+ &= k'(0)\Delta a^+ + \frac{1}{2}k''(0)(\Delta a^+)^2 \\ &\quad + \frac{1}{3!}k'''(0)(\Delta a^+)^3 + \dots, \end{aligned} \quad (4.53)$$

$$\begin{aligned}\Delta k^- &= k'(0)(-\Delta a^-) + \frac{1}{2}k''(0)(-\Delta a^-)^2 \\ &\quad + \frac{1}{3!}k'''(0)(-\Delta a^-)^3 + \dots \end{aligned} \quad (4.54)$$

全反応度値は

$$\Delta k = \Delta k^+ - \Delta k^- \quad (4.55)$$

から計算される。もし、 $\Delta a = \Delta a^+ = \Delta a^-$  となるように基準点を選べば、(4.55) 式は以下のようなになる。

$$\Delta k = 2k'(0)\Delta a + \frac{2}{3!}k'''(0)(\Delta a)^3 + \dots \quad (4.56)$$

本研究では、この手法を中央点法と呼ぶことにする。奇数次の Taylor 級数項を用いる中央点法は、1 次だけ高次の中央点法と同じ結果となるという利点がある。



表 4.5: TCA 炉心の Np-237 サンプル反応度値に対する参照解と Taylor 級数近似を用いた中央点法と中間点法による結果の比較

反応度値 ( $10^{-3}\Delta k/k'$ )		
参照解	1.754(0.014)*	
Taylor 級数	中央点法	中間点法
1 次まで	1.415(0.013)**	1.793(0.018)
2 次まで	—	1.312(0.026)
3 次まで	1.577(0.015)	1.771(0.036)
4 次まで	—	1.531(0.050)
5 次まで	1.611(0.018)	1.707(0.071)
6 次まで	—	1.593(0.107)
7 次まで	1.640(0.021)	1.548(0.156)
8 次まで	—	1.423(0.174)

\* 括弧内の値は 1 標準偏差の統計誤差を表す。

\*\* すべての計算結果は源振動効果を含む。

中間点法では、正側 (正の密度変化) と負側 (負の密度変化) の反応度値がほぼ同じになるように、基準点を Np-237 サンプルが 66.7%ボイド化されている密度割合とした。このとき、正側の反応度はサンプル密度を 200%増加させた体系 (基準体系の 66.7%ボイド→0%ボイド体系) について計算し、負側の反応度はサンプル密度 100%減少させた体系 (基準体系の 66.7%ボイド→100%ボイド体系) について計算することになる。表 4.5 は、TCA 炉心の Np-237 サンプル反応度値に対して、Taylor 級数近似を用いた中央点法と中間点法による結果と参照解の比較を示している。中央点法の結果は、次数が大きくなるにつれて、参照解に近づくが、7 次の場合でも約 7%の差異が見られる。一方、中間点法は、次数を大きくするとともに振動する結果が得られている。これは、表 4.6 で見られるように、正側の反応度の計算によって引き起こされている。正側の反応度は、密度変化が 100%を超える計算となるので、Taylor 級数高次の影響が大きく効いてくることになる。

Taylor 級数近似の振動を抑制するために、中間点法で Padé 近似を適用してみた。表 4.7 は、TCA 炉心の Np-237 サンプル反応度値に対して、Padé 近似を用いた中間点法の結果と参照解を比較を示している。Padé 近似は、正側の反応度に対して、比較的安定した結果を与えるが、Padé 近似を用いた中間点法は、全反応度で見たときに、参照解を依然として過小評価している。

## 4.5 結言

本研究では、微分演算子サンプリング法を用いて Taylor 級数展開項を評価する手法の、サンプル反応度値計算に対する適用性について調べた。また、Padé 近似法、中央点法、中間点法の代替手法の適用性についても調べた。核分裂源効果を含む高次の微分演算子サンプリング

表 4.6: Taylor 級数近似を用いた中間点法によって計算した正側と負側の反応度価値と参照解の比較

反応度価値 ( $10^{-3}\Delta k/kk'$ )		
	正側の反応度 +200%変化	負側の反応度 -100%変化
参照解	-0.843(0.014)*	0.911(0.014)
Taylor 級数近似を用いた中間点法		
1 次まで	-1.195(0.016)**	0.598(0.008)
2 次まで	-0.554(0.024)	0.758(0.009)
3 次まで	-0.962(0.034)	0.809(0.010)
4 次まで	-0.706(0.049)	0.825(0.010)
5 次まで	-0.876(0.070)	0.830(0.010)
6 次まで	-0.761(0.106)	0.832(0.010)
7 次まで	-0.716(0.156)	0.832(0.010)
8 次まで	-0.592(0.174)	0.831(0.010)

\* 括弧内の値は 1 標準偏差の統計誤差を表す。

\*\* すべての計算結果は源摂動効果を含む。

表 4.7: Padé 近似を用いた中間点法によって計算した正側と負側の反応度価値と参照解の比較

反応度価値 ( $10^{-3}\Delta k/kk'$ )			
	正側の反応度 (+200%)	負側の反応度 (-100%)	全反応度
参照解	-0.843(0.014)*	0.911(0.014)	1.754(0.014)
[1/1] Padé 近似	-0.783(0.008)**	0.821(0.009)	1.602(0.012)
[2/2] Padé 近似	-0.810(0.037)	0.837(0.011)	1.644(0.038)

\* 括弧内の値は 1 標準偏差の統計誤差を表す。

\*\* すべての計算結果は源摂動効果を含む。

リング法の定式化を行った。定式化された手法を MVP コードに実装し、ベンチマーク計算を行い、以下の結果が得られた。

- 2 次の Taylor 級数近似は、Godiva 炉心と Jezebel 炉心のサンプル反応度価値計算に対して非常によい結果を与える。計算結果は 1 標準偏差以内で参照解と一致する。
- TCA 炉心の Np-237 サンプル反応度価値計算については、高次の Taylor 級数項を評価する必要がある。しかしながら、高次の源摂動効果は、統計的な変動が大きくなるため、信頼性のある結果を得ることは難しい。
- 源摂動効果は、すべてのケースにおいて、反応度価値の大きな割合を占める。Godiva 炉心では約 53%、Jezebel 炉心では約 49%、TCA 炉心では約 44%となる。従って、反応度価値を正確に評価するためには、源摂動効果を考慮することが必須である。
- 低次の微分係数から Padé 近似を用いて反応度価値を計算すると、高次の Taylor 近似と同程度の精度の結果を得ることができる。しかし、TCA 炉心の Np-237 サンプル反応度価値問題については、依然として、Padé 近似の結果と参照解の間に差異が見られる。
- Taylor 級数を用いた中央点法と Padé 近似を用いた中間点法は、両者とも、通常の Taylor 級数近似の結果とほぼ同程度の精度の結果を与える。TCA 炉心の Np-237 サンプル反応度価値問題については、これらの手法を用いても改善は見られなかった。
- 100%を超えるような摂動に対しては、Padé 近似は Taylor 級数近似よりも良い結果を与える。

本研究では、微分演算子サンプリング法を用いて Taylor 級数展開項を評価する手法でサンプル反応度価値を計算するのが難しいケースを示した。そのような場合に、高次の Taylor 級数項を考慮することによって、比較的よい近似解を得ることができる。しかしながら、サンプル反応度価値の正確な評価のためには、更なる手法の改善が必要であり、適用範囲の調査も必要である。

## 付録: (4.6) 式の導出

(4.4) 式から (4.6) 式が導出されることを示す。 $n = 2$  のとき、(4.4) 式は次のようになる。

$$W_f^{(2)} = \frac{\partial W_f^{(1)}}{\partial a} + W_f^{(1)} W_f^{(1)} \quad (4.57)$$

$n = 3$  のとき、(4.4) 式は次のようになる。

$$W_f^{(3)} = \frac{\partial W_f^{(2)}}{\partial a} + W_f^{(2)} W_f^{(1)} \quad (4.58)$$

(4.57) 式を  $a$  で微分すると

$$\frac{\partial W_f^{(2)}}{\partial a} = \frac{\partial^2 W_f^{(1)}}{\partial a^2} + 2 \frac{\partial W_f^{(1)}}{\partial a} W_f^{(1)} \quad (4.59)$$



が得られ、これを (4.58) 式に代入すると

$$W_f^{(3)} = \frac{\partial^2 W_f^{(1)}}{\partial a^2} + 2 \frac{\partial W_f^{(1)}}{\partial a} W_f^{(1)} + W_f^{(2)} W_f^{(1)} \quad (4.60)$$

$n = 4$  のとき、(4.4) 式は次のようになる。

$$W_f^{(4)} = \frac{\partial W_f^{(3)}}{\partial a} + W_f^{(3)} W_f^{(1)} \quad (4.61)$$

(4.60) 式を  $a$  で微分すると

$$\frac{\partial W_f^{(3)}}{\partial a} = \frac{\partial^3 W_f^{(2)}}{\partial a^3} + 2 \frac{\partial^2 W_f^{(1)}}{\partial a^2} W_f^{(1)} + 2 \left( \frac{\partial W_f^{(1)}}{\partial a} \right)^2 + \frac{\partial W_f^{(2)}}{\partial a} W_f^{(1)} + W_f^{(2)} \frac{\partial W_f^{(1)}}{\partial a} \quad (4.62)$$

となり、(4.59) 式を用いると

$$\begin{aligned} \frac{\partial W_f^{(3)}}{\partial a} &= \frac{\partial^3 W_f^{(2)}}{\partial a^3} + 3 \frac{\partial^2 W_f^{(1)}}{\partial a^2} W_f^{(1)} + 2 \left( \frac{\partial W_f^{(1)}}{\partial a} \right)^2 + 2 \frac{\partial W_f^{(1)}}{\partial a} \left( W_f^{(1)} \right)^2 + W_f^{(2)} \frac{\partial W_f^{(1)}}{\partial a} \\ &= \frac{\partial^3 W_f^{(2)}}{\partial a^3} + 3 \frac{\partial^2 W_f^{(1)}}{\partial a^2} W_f^{(1)} + 2 \frac{\partial W_f^{(1)}}{\partial a} \left( \frac{\partial W_f^{(1)}}{\partial a} + \left( W_f^{(1)} \right)^2 \right) + W_f^{(2)} \frac{\partial W_f^{(1)}}{\partial a} \\ &= \frac{\partial^3 W_f^{(2)}}{\partial a^3} + 3 \frac{\partial^2 W_f^{(1)}}{\partial a^2} W_f^{(1)} + 3 \frac{\partial W_f^{(1)}}{\partial a} W_f^{(2)} \end{aligned} \quad (4.63)$$

となる。これを (4.61) 式に代入すると

$$W_f^{(4)} = \frac{\partial^3 W_f^{(2)}}{\partial a^3} + 3 \frac{\partial^2 W_f^{(1)}}{\partial a^2} W_f^{(1)} + 3 \frac{\partial W_f^{(1)}}{\partial a} W_f^{(2)} + W_f^{(1)} W_f^{(3)} \quad (4.64)$$

が得られる。

以上より、一般に

$$W_f^{(n)} = \frac{\partial^{n-1} W_f^{(1)}}{\partial a^{n-1}} + \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n-1}{i} \frac{\partial^{n-i-1} W_f^{(1)}}{\partial a^{n-i-1}} W_f^{(i)} \quad (4.65)$$

が成立すると推定される。以下で、(4.65) 式が成立することを帰納的に証明する。 $n = k$  のとき、(4.65) 式が成立するとすると

$$W_f^{(k)} = \frac{\partial^{k-1} W_f^{(1)}}{\partial a^{k-1}} + \sum_{i=1}^{k-1} \binom{k-1}{i} \frac{\partial^{k-i-1} W_f^{(1)}}{\partial a^{k-i-1}} W_f^{(i)} \quad (4.66)$$

である。(4.4) 式で、 $n = k + 1$  とすると

$$W_f^{(k+1)} = \frac{\partial W_f^{(k)}}{\partial a} + W_f^{(k)} W_f^{(1)} \quad (4.67)$$

であり、(4.66) 式を (4.67) 式に代入すると

$$\begin{aligned}
W_f^{(k+1)} &= \frac{\partial^k W_f^{(1)}}{\partial a^k} + \sum_{i=1}^{k-1} \binom{k-1}{i} \left( \frac{\partial^{k-i} W_f^{(1)}}{\partial a^{k-i}} W_f^{(i)} + \frac{\partial^{k-i-1} W_f^{(1)}}{\partial a^{k-i-1}} \frac{\partial W_f^{(i)}}{\partial a} \right) \\
&\quad + \frac{\partial^{k-1} W_f^{(1)}}{\partial a^{k-1}} W_f^{(1)} + \sum_{i=1}^{k-1} \binom{k-1}{i} \frac{\partial^{k-i-1} W_f^{(1)}}{\partial a^{k-i-1}} W_f^{(i)} W_f^{(1)} \\
&= \frac{\partial^k W_f^{(1)}}{\partial a^k} + \sum_{i=1}^{k-1} \binom{k-1}{i} \frac{\partial^{k-i} W_f^{(1)}}{\partial a^{k-i}} W_f^{(i)} \\
&\quad + \frac{\partial^{k-1} W_f^{(1)}}{\partial a^{k-1}} W_f^{(1)} + \sum_{i=1}^{k-1} \binom{k-1}{i} \frac{\partial^{k-i-1} W_f^{(1)}}{\partial a^{k-i-1}} W_f^{(i+1)} \\
&= \frac{\partial^k W_f^{(1)}}{\partial a^k} + (k-1) \frac{\partial^{k-1} W_f^{(1)}}{\partial a^{k-1}} W_f^{(1)} + \sum_{i=2}^{k-1} \binom{k-1}{i} \frac{\partial^{k-i} W_f^{(1)}}{\partial a^{k-i}} W_f^{(i)} \\
&\quad + \frac{\partial^{k-1} W_f^{(1)}}{\partial a^{k-1}} W_f^{(1)} + \sum_{i=2}^{k-1} \binom{k-1}{i-1} \frac{\partial^{k-i} W_f^{(1)}}{\partial a^{k-i}} W_f^{(i)} + W_f^{(1)} W_f^{(k)} \\
&= \frac{\partial^k W_f^{(1)}}{\partial a^k} + \binom{k}{1} \frac{\partial^{k-1} W_f^{(1)}}{\partial a^{k-1}} W_f^{(1)} \\
&\quad + \sum_{i=2}^{k-1} \left( \binom{k-1}{i} + \binom{k-1}{i-1} \right) \frac{\partial^{k-i} W_f^{(1)}}{\partial a^{k-i}} W_f^{(i)} + W_f^{(1)} W_f^{(k)} \tag{4.68}
\end{aligned}$$

なる。ここで、

$$\begin{aligned}
\binom{k-1}{i} + \binom{k-1}{i-1} &= \frac{(k-1)!}{i!(k-i-1)!} + \frac{(k-1)!}{(i-1)!(k-i)!} \\
&= (k-1)! \left( \frac{k-i}{i!(k-i)!} + \frac{i}{i!(k-i)!} \right) \\
&= \frac{k!}{i!(k-i)!} = \binom{k}{i} \tag{4.69}
\end{aligned}$$

であることを用いると、(4.68) 式は

$$\begin{aligned}
W_f^{(k+1)} &= \frac{\partial^k W_f^{(1)}}{\partial a^k} + \sum_{i=1}^{k-1} \binom{k}{i} \frac{\partial^{k-i} W_f^{(1)}}{\partial a^{k-i}} W_f^{(i)} + W_f^{(1)} W_f^{(k)} \\
&= \frac{\partial^k W_f^{(1)}}{\partial a^k} + \sum_{i=1}^k \binom{k}{i} \frac{\partial^{k-i} W_f^{(1)}}{\partial a^{k-i}} W_f^{(i)} \tag{4.70}
\end{aligned}$$

となり、 $n = k + 1$  のときも成立する。よって、 $n \geq 2$  の任意の整数に対して、(4.65) 式は成立する。

## 第5章 次世代核分裂確率に基づく実効遅発中性子割合計算手法の理論的考察と比較

### 5.1 緒言

実効遅発中性子割合 (通常、 $\beta_{\text{eff}}$  と称される) は、炉心解析において非常に重要なパラメータであることは言うまでもない。実効遅発中性子割合は、原子炉動特性で重要な役割を果たすだけでなく、炉物理実験の静的な解析においても重要な役割を果たす。即ち、 $\beta_{\text{eff}}$  は、ドル単位の反応度から  $\Delta k/k$  単位の反応度へ変換するときの変換係数として使われ、実験値と計算値を比較するときに必ず必要になる。

実効遅発中性子割合は、輸送方程式や拡散方程式から一点炉動特性方程式を導く際に、中性子束と随伴中性子束の双一次形式 (bilinear form) として定義される。決定論的手法では、多群化された随伴方程式を解くため、中性子束の計算 (forward 計算) と同様に随伴中性子束の計算も行うことができ、実効遅発中性子割合の計算も容易である。しかし、モンテカルロ法の場合、随伴中性子束の計算は容易ではない。多群モンテカルロ法では、手法的に容易であるが分散低減法を適切に適用しなければ精度良く計算できないが多く、連続エネルギーモンテカルロ法では、一般的な手法 [56] が提案されているものの、コードへの実装は非常に困難である。たとえ随伴中性子束が計算できたとしても、双一次形式の積分値を計算するには位相空間の離散化が必要となり、すべての離散化された位相空間にわたって中性子束と随伴中性子束を精度良く計算する必要がある。それゆえ、実効遅発中性子割合の定義において随伴中性子束が存在することが、モンテカルロ法を用いた実効遅発中性子割合の計算を非常に困難なものとしている。

最近、モンテカルロ法を用いて実効遅発中性子割合を計算する新たな手法が提案されている。Meulekamp らは、Keepin の定義 [19, p.163] に基づいて実効遅発中性子割合を評価した [21]。彼らは、実効遅発中性子割合を、「すべての中性子が引き起こす平均核分裂数」に対する「遅発中性子が引き起こす平均核分裂数」の比として解釈し、これをモンテカルロ法で評価した。名内らは、Meulekamp らと同様の定義を用いて実効遅発割合を計算したが、彼らは、実効遅発中性子割合を、「すべての中性子が核分裂を引き起こし、次の世代に発生する平均核分裂中性子数」に対する「遅発中性子が核分裂を引き起こし、次の世代に発生する平均核分裂中性子」の比として定義した [22]。これらの定義を用いれば、モンテカルロコードで核分裂数もしくは核分裂中性子数をスコアリングすることにより容易に彼らの定義による実効遅発中性子割合を計算することが可能である。

本章では、モンテカルロ法により  $\beta_{\text{eff}}$  を評価する Meulekamp と名内の手法について理論



的に考察する [57]。本研究の目的は二つあり、一つは、これらの手法で数学的にどのような項が評価されているのかを明らかにすることである。このために、小林 [58] によって定義されたインポートランス関数を導入し、モンテカルロ法の結果と決定論的手法の結果を比較する。もう一つの目的は、通常の  $\beta_{\text{eff}}$  の定義と比べて、これらの手法で計算された実効遅発中性子割合がどの程度の計算精度を有するのか評価することである。このために、決定論的コードを用い、様々な体系に対してベンチマーク計算を行う。Meulekamp と名内の手法を用い、決定論的に実効遅発中性子割合を計算した結果と、通常の  $\beta_{\text{eff}}$  の定義で計算した結果を比較する。上記二つの目的に対して、本研究ではすべて、計算によるベンチマーク評価を行う。即ち、計算値と実験値との比較は行わない。これは、計算値が評価済み核データに起因する不確定性、実験値が少なくとも 2-3% の実験誤差を持つからである。

## 5.2 理論的考察

### 5.2.1 通常の $\beta_{\text{eff}}$ の定義

外部中性子源のない定常状態の中性子輸送方程式は、(2.25) 式と (2.26) 式より以下のように表すことができる。

$$L\Phi(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) = \frac{1}{k} S_f(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) \quad (5.1)$$

ここで、 $\Phi$  は角度中性子束、 $k$  は実効増倍率 (固有値)、 $S_f$  は核分裂源である。 $L$  は、(2.2) 式において時間に依存しない場合の正味の消滅演算子であり、以下のように定義される。

$$L\Phi(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) = \boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla \Phi(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) + \Sigma_t(\mathbf{r}, E) \Phi(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) - S_s(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) \quad (5.2)$$

$$S_s(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t) = \int dE' \int d\boldsymbol{\Omega}' \Sigma_s(\mathbf{r}, E \leftarrow E', \boldsymbol{\Omega} \leftarrow \boldsymbol{\Omega}') \Phi(\mathbf{r}, E', \boldsymbol{\Omega}') \quad (5.3)$$

(5.1) 式は斉次方程式 (homogeneous equation) になるので、 $k$  は固有値を導入している。

摂動理論を用いることにより、実効遅発中性子割合は、慣習的に以下のように定義される。

$$\beta_{\text{eff}} = \frac{\sum_i \langle \Phi^\dagger(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) S_{f,i}^d(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) \rangle}{\langle \Phi^\dagger(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) S_f(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) \rangle} \quad (5.4)$$

ここで、ブラケットは  $\int d\mathbf{r} \int d\boldsymbol{\Omega} \int dE$  を表し、 $\Phi^\dagger(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega})$  は随伴角度中性子束 (adjoint angular flux) を表す。随伴角度中性子束は、以下の方程式から得られる。

$$\begin{aligned} L^\dagger \Phi^\dagger(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) &= \frac{1}{k} \sum_k \int d\boldsymbol{\Omega}' \int dE' \left[ \chi_p^k(E', \boldsymbol{\Omega}') \nu_p^k(E) + \sum_i \chi_{d,i}^k(E', \boldsymbol{\Omega}') \nu_{d,i}^k(E) \right] \\ &\quad \times \Sigma_f^k(\mathbf{r}, E) \Phi^\dagger(\mathbf{r}, E', \boldsymbol{\Omega}') \end{aligned} \quad (5.5)$$

$$\begin{aligned} L^\dagger \Phi^\dagger(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) &\equiv -\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla \Phi^\dagger(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) + \Sigma_t(\mathbf{r}, E) \Phi^\dagger(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) \\ &\quad - \int d\boldsymbol{\Omega}' \int dE' \Sigma_s(\mathbf{r}, E' \leftarrow E, \boldsymbol{\Omega}' \leftarrow \boldsymbol{\Omega}) \Phi^\dagger(\mathbf{r}, E', \boldsymbol{\Omega}') \end{aligned} \quad (5.6)$$

(5.5) 式において、核種インデックス  $k$  と実効増倍率が同じ記号で表されているので注意されたい。(右辺最初の係数  $1/k$  が実効増倍率である。)

### 5.2.2 Meulekamp の手法と名内の手法

Meulekamp らは、 $\beta_{\text{eff}}$  をすべての中性子によって引き起こされる平均核分裂数に対する、遅発中性子によって引き起こされる平均核分裂数の比として解釈し [21]、 $\beta_{\text{eff}}$  をモンテカルロ法で計算した。彼らの実装では、源中性子 (スタート中性子) が次の世代に引き起こす核分裂数をスコアリングするという近似が用いられた。即ち、彼らは次世代核分裂確率 (next fission probability) に基づいて遅発中性子割合を計算した。

一方、名内らは、 $\beta_{\text{eff}}$  をすべての中性子が次の世代に発生させる核分裂中性子数に対する、遅発中性子が次の世代に発生させる核分裂中性子数と定義し [22]、 $\beta_{\text{eff}}$  をモンテカルロ法で計算した。Meulekamp と名内の手法は非常に類似しており、名内の手法では、核分裂中性子数をスコアリングするのに対し、Meulekamp の手法では、核分裂数をスコアリングする。

Meulekamp らと名内らは、言葉で  $\beta_{\text{eff}}$  の評価手法を明確に定義したが、数学的にどのような項が評価されるのかは明確ではない。本節では、それらの項が小林によって定義されるインポートランス関数 [58] によって重み付けされた項であることを理論的に証明する。

最初に、以下の方程式を考える。

$$L^\dagger G^\dagger(P \leftarrow P'') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'')\delta(E - E'')\delta(\boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\Omega}'') \quad (5.7)$$

ここで、 $G^\dagger$  は随伴グリーン関数 (adjoint Green's function) [59, p.57]、 $P$  は 6 次元ベクトル  $(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega})$ 、 $\delta$  はデルタ関数である。(5.7) 式に随伴源  $S^\dagger(P'')$  を掛け、 $P''$  についてすべての位相空間で積分すると

$$L^\dagger G^\dagger(P) = S^\dagger(P), \quad (5.8)$$

$$G^\dagger(P) = \int dP'' S^\dagger(P'') G^\dagger(P \leftarrow P'') \quad (5.9)$$

を得る。随伴源  $S^\dagger$  は、通常、核分裂断面積  $\Sigma_f$  のような応答関数 (response function) である。(5.1) 式と (5.8) 式を用いると、以下の関係式が得られる。

$$\langle S^\dagger(P) \Phi(P) \rangle = \frac{1}{k} \langle G^\dagger(P) S_f(P) \rangle \quad (5.10)$$

(5.10) 式の左辺は、ある反応の応答を示しているので、 $G^\dagger(P)$  は、位相空間  $P$  における中性子がその応答へ与える寄与を意味している。それゆえ、小林は、 $G^\dagger$  をインポートランス関数と呼んだ [60]。また、通常の随伴関数  $\Phi^\dagger$  にも中性子インポートランスの物理的意味があり、それもインポートランス関数と呼ばれる [61]。本研究では、 $G^\dagger$  をインポートランス関数、 $\Phi^\dagger$  を (通常の) 随伴関数と呼び、これらを区別することにする。

(5.10) 式は、Meulekamp と名内の手法が (5.4) 式の  $\beta_{\text{eff}}$  ではなく、以下の物理量を評価していることを示唆している。

$$\beta_{\text{eff}}^G \equiv \frac{\sum_i \langle G^\dagger(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) S_{f,i}^d(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) \rangle}{\langle G^\dagger(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) S_f(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) \rangle} \quad (5.11)$$



これを明らかにするために、 $G^\dagger$  で重み付けられた項がモンテカルロ法でどのようにして評価されるかを考える。(5.8) 式は、以下のように書き直すことができる。

$$G^\dagger(P) = S^\dagger(P) + \int dP' G^\dagger(P') \mathcal{K}_s(P' \leftarrow P) \quad (5.12)$$

ここで、 $S^\dagger(P)$  は、 $P$  で初めて衝突する随伴源 (first-flight adjoint source) であり、以下のように定義される。

$$S^\dagger(P) = \int d\mathbf{r}' \frac{S^\dagger(\mathbf{r}', E, \boldsymbol{\Omega})}{\Sigma_t(\mathbf{r}', E)} T(\mathbf{r}' \leftarrow \mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) \quad (5.13)$$

$\mathcal{K}(P' \leftarrow P)$  は、(2.107) 式で  $P'$  と  $P$  を入れ替えたもので、以下のように定義される。

$$\mathcal{K}_s(P' \leftarrow P) = C_s(\mathbf{r}', E' \leftarrow E, \boldsymbol{\Omega}' \leftarrow \boldsymbol{\Omega}) T(\mathbf{r}' \leftarrow \mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) \quad (5.14)$$

(5.12) 式に対するノイマン級数解は、2.3 節で見たように、次式のように表される。

$$G^\dagger(P) = \sum_{m=0}^{\infty} \int dP' S^\dagger(P') \mathcal{K}_{s,m}(P' \leftarrow P) \quad (5.15)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{s,0}(P' \leftarrow P) &= \delta(P' - P), \\ \mathcal{K}_{s,1}(P' \leftarrow P) &= \mathcal{K}_s(P' \leftarrow P), \\ \mathcal{K}_{s,2}(P' \leftarrow P) &= \int dP_1 \mathcal{K}_s(P' \leftarrow P_1) \mathcal{K}_s(P_1 \leftarrow P), \\ &\vdots \\ \mathcal{K}_{s,m}(P' \leftarrow P) &= \int dP_1 \cdots \int dP_{m-1} \mathcal{K}_s(P' \leftarrow P_{m-1}) \cdots \mathcal{K}_s(P_1 \leftarrow P) \end{aligned} \quad (5.16)$$

である。(5.15) 式の  $m$  番目の項は、位置  $\mathbf{r}$ 、エネルギー  $E$ 、角度  $\boldsymbol{\Omega}$  の中性子が  $m$  回衝突し、 $S^\dagger$  で表現される反応を引き起こして衝突する確率を表している。 $G^\dagger$  に対する追跡 (トラッキング) 過程は、通常のモンテカルロ計算 (forward Monte Carlo) で実行することができるので、 $\langle G^\dagger S_f^d \rangle$  と  $\langle G^\dagger S_f \rangle$  の項は、それぞれ、遅発中性子とすべての中性子が引き起こす  $S^\dagger$  に対する平均反応数を計算していることになる。 $S^\dagger = \Sigma_f$  のときは、Meulekamp の方法で (5.11) 式の  $\beta_{\text{eff}}^G$  を計算していることになり、 $S^\dagger = \nu \Sigma_f$  のときは、名内の方法で (5.11) 式の  $\beta_{\text{eff}}^G$  を計算していることになる。即ち、Meulekamp、名内の方法とも、(5.4) 式で定義される  $\beta_{\text{eff}}$  を計算しているのではなく、(5.11) 式で定義される  $\beta_{\text{eff}}^G$  を計算しており、どちらも近似を含む手法である。

## 5.3 数値計算による検証

### 5.3.1 ベンチマーク体系と計算手法

前節で理論的に定式化した Meulekamp と名内の方法を数値的に検証するため、ICSBEP ハンドブック [53] からいくつかの体系を選択し、ベンチマーク計算を行う。中性子エネルギー



ギースペクトルと重核種組成の観点と、決定論的手法で参照解が得るという観点から、以下の体系を選択した。

- Godiva (HEU-MET-FAST-001): 高濃縮ウラン (~94 wt.% U-235) 裸の体系
- Jezebel (PU-MET-FAST-001): 金属プルトニウム-239(~95 at.% Pu-239) 裸の体系
- Jezebel-233 (U233-MET-FAST-001): 金属ウラン-233(~98 at.% U-233) 裸の体系
- Flatop-U (HEU-MET-FAST-028): ノーマルウラン\*(~99.3wt.% U-238, ~0.7wt.% U-235) 反射体付き高濃縮ウラン球 (~93 wt.% U-235)
- Flatop-Pu (PU-MET-FAST-006): ノーマルウラン反射体付きプルトニウム球 (~94 at.% Pu-239)
- Flatop-233 (U233-MET-FAST-006): ノーマルウラン反射体付きウラン-233 球 (~98 at.%)
- Unreflected-Sphere-U (HEU-SOL-THERM-013-001): 反射体のない硝酸濃縮ウラン溶液 (~93 wt.% U-235)
- Unreflected-Sphere-Pu (PU-SOL-THERM-009-003): 反射体のない硝酸プルトニウム溶液 (~ 97 wt.% Pu-239)
- Unreflected-Sphere-233 (U233-SOL-THERM-001-001): 反射体のない硝酸ウラン-233 溶液 (~ 98 wt.% U-233)
- Reflected-Sphere-U (HEU-SOL-THERM-009-001): 水反射体付き酸フッ化濃縮ウラン溶液 (enriched uranium oxyfluoride solution)(~ 93 wt.% U-235)
- Reflected-Sphere-Pu (PU-SOL-THERM-001-001): 水反射体付き硝酸プルトニウム溶液 (~ 95 wt.% Pu-239)
- Reflected-Sphere-233 (U233-SOL-THERM-005-001): 水反射体付き硝酸ウラン-233 溶液 (~ 99 wt.% U-233)

核種組成、体系の形状などの仕様については、ICSBEP ハンドブックを参照されたい。括弧内の ID は、ハンドブックで定義されている ID を表している。高速炉に対するベンチマーク計算は、Meulekamp ら [21] や千葉 [62] によっても行われている。

モンテカルロ法で  $\beta_{\text{eff}}^G$  を計算するため、Meulekamp と名内の手法を連続エネルギーモンテカルロコード MVP [27] に実装した。 $\beta_{\text{eff}}^G$  は、実効増倍率  $k_{\text{eff}}$  の評価と同様にして、衝突、トラックレングス (track-length)、アナログエスティメータによる複合エスティメータにより評価する。モンテカルロ計算は、評価済み核データ JENDL-3.3 [52] と修正版の MVP コー

---

\*天然ウランとほとんど同じ組成であるが、ここでは、ICSBEP ハンドブックの記述にしたがってノーマルウランと呼ぶことにする。

ドを用いて行う。すべてのケースについて、全ヒストリー数 2,100 万ヒストリー (バッチサイズ 1 万、スキップバッチ 100、有効バッチ 2,000) でモンテカルロ計算を行う。

$\beta_{\text{eff}}^G$  に対する参照解は決定論的手法で計算する。高速炉体系については、中性子輸送計算コード CBG [63, 64] と JENDL-3.3 を用いた 70 群輸送計算を行う。SLAROM-UF コード [65] を用いて 70 群実効断面積を作成する。非等方散乱は、5 次のルジャンドル多項式展開 ( $P_5$ ) によって考慮し、離散座標輸送計算については、40 離散点を用いた二重ガウス求積法 (double Gaussian angular quadrature, DP<sub>19</sub>) を用いる。メッシュ幅は、すべての領域において、0.2 cm 以下になるように刻む。熱炉体系については、高速炉と同様の手法を用いるが、MOSRA-SRAC コードシステム (SRAC2006 コードシステムの拡張版 [66]) の 107 群計算により実効断面積を求め、非等方散乱は、3 次のルジャンドル多項式展開 ( $P_3$ ) によって考慮する。

### 5.3.2 モンテカルロ法と決定論的手法による結果の比較

Meulekamp と名内の手法が、(5.11) 式で定義される遅発中性子割合であることを数値的に検証するために、モンテカルロ法と決定論的手法によって得られた結果の比較を行う。表 5.1 と表 5.2 は、それぞれ、Meulekamp と名内の手法で、MVP コードと CBG コードを用いて計算した  $\beta_{\text{eff}}^G$  を比較したものである。すべての体系において、モンテカルロの結果は、参照解 (決定論的手法の結果) と非常によく一致しており、ほとんどすべての体系に対して、1 標準偏差の範囲内で一致する。Meulekamp の手法で Jezebel-233 と Flatop-Pu を計算したときと、名内の手法で Jezebel と Flatop-Pu を計算したときのみ 1 標準偏差を少し超えた差異

表 5.1: Meulekamp の手法を用い、MVP コードと CBG コードで計算したインポートランス重みの遅発中性子割合の比較

カテゴリ	体系	インポートランス重みの遅発中性子割合 (pcm)	
		決定論 (CBG)	モンテカルロ (MVP)
Fast, Bare	Godiva	660.5	662.2(2.2)*
	Jezebel	194.4	195.4(1.2)
	Jezebel-233	308.2	310.2(1.9)
Fast, Reflected (normal U)	Flatop-U	644.3	643.9(2.4)
	Flatop-Pu	273.8	272.0(1.3)
	Flatop-233	362.2	363.3(1.8)
Thermal, Unreflected	Unreflected-Sphere-U	711.4	710.6(2.8)
	Unreflected-Sphere-Pu	224.6	223.8(1.7)
	Unreflected-Sphere-233	296.9	298.4(1.8)
Thermal, Reflected (water)	Reflected-Sphere-U	832.8	830.2(3.3)
	Reflected-Sphere-Pu	271.2	270.3(1.9)
	Reflected-Sphere-233	345.6	345.2(2.2)

\* 括弧内の値は 1 標準偏差の統計誤差を表す。



表 5.2: 名内の手法を用い、MVP コードと CBG コードで計算したインポートランス重みの遅発中性子割合の比較

カテゴリ	体系	インポートランス重みの遅発中性子割合 (pcm)	
		決定論 (CBG)	モンテカルロ (MVP)
Fast, Bare	Godiva	627.2	628.6(2.1)*
	Jezebel	181.7	182.4(1.2)
	Jezebel-233	289.6	291.2(1.7)
Fast, Reflected (normal U)	Flatop-U	610.3	609.4(2.3)
	Flatop-Pu	260.8	259.0(1.3)
	Flatop-233	341.8	342.8(2.4)
Thermal, Unreflected	Unreflected-Sphere-U	711.3	710.5(2.8)
	Unreflected-Sphere-Pu	224.6	223.7(1.7)
	Unreflected-Sphere-233	296.8	298.3(1.8)
Thermal, Reflected (water)	Reflected-Sphere-U	830.7	828.1(3.3)
	Reflected-Sphere-Pu	271.0	270.2(1.9)
	Reflected-Sphere-233	345.5	345.0(2.2)

\* 括弧内の値は 1 標準偏差の統計誤差を表す。

があるが、2 標準偏差の範囲内では一致している。以上の結果より、Meulekamp と名内の手法が、小林によって定義されたインポートランス関数で重み付けられた遅発中性子割合を計算していることが数値的にも確認できた。

### 5.3.3 インポートランス重みと随伴中性子束重みの遅発中性子割合の比較

Meulekamp と名内の手法で計算したインポートランス重みの遅発中性子割合の近似精度を調べるため、インポートランス重みの遅発中性子割合と、通常の  $\beta_{\text{eff}}$  である随伴中性子束重みの遅発中性子割合 (実効遅発中性子割合) を比較する。モンテカルロ法による Meulekamp と名内の手法は、決定論と統計誤差の範囲内で同じ結果を与えることが前節で示されているので、本節では、決定論的手法に基づく CBG コードを用いた計算結果を比較する。実効遅発中性子割合  $\beta_{\text{eff}}$  は、5.3.1 節で示した手法と同じ手法で計算する。

表 5.3 は、インポートランス重みの遅発中性子割合と実効遅発中性子割合を比較したものである。裸の高速炉体系では、名内の手法で計算された遅発中性子割合は、 $\beta_{\text{eff}}$  と良く一致するが、Meulekamp の手法で計算された遅発中性子割合は、約 5% 過大評価する。ウラン反射体付き高速炉体系では、Meulekamp と名内の手法は、それぞれ、約 5% と約 10%  $\beta_{\text{eff}}$  を過小評価する。反射体のない熱炉体系では、Meulekamp と名内の手法による結果はほぼ同じ値となり、両手法とも  $\beta_{\text{eff}}$  と良く一致する結果を与える。水反射体付き熱炉体系では、Meulekamp と名内の手法による結果はほぼ同じ値となるが、両手法とも約 1%  $\beta_{\text{eff}}$  を過小評価する結果を与える。これらの結果より、名内の手法は、裸の高速炉と熱炉体系に対しては良い精度をもつが、ウラン反射体付き高速炉体系については、大きく過小評価すると言える。一方、Meulekamp



表 5.3: CBG コードで計算したインポートランス重みの遅発中性子割合と実効遅発中性子割合の比較

カテゴリ	体系	遅発中性子割合 (pcm)		
		Meulekamp	名内	$\beta_{\text{eff}}$
Fast, Bare	Godiva	660.5	627.2	632.6
	Jezebel	194.4	181.7	182.9
	Jezebel-233	308.2	289.6	291.9
Fast, Reflected (normal U)	Flattop-U	644.3	610.3	678.5
	Flattop-Pu	273.8	260.8	281.0
	Flattop-233	362.2	341.8	377.6
Thermal, Unreflected	Unreflected-Sphere-U	711.4	711.3	716.1
	Unreflected-Sphere-Pu	224.6	224.6	225.4
	Unreflected-Sphere-233	296.9	296.8	298.9
Thermal, Reflected (water)	Reflected-Sphere-U	832.8	830.7	842.4
	Reflected-Sphere-Pu	271.2	271.0	275.2
	Reflected-Sphere-233	345.6	345.5	350.4

の手法は、熱炉体系に対しては良い精度をもつが、高速炉体系に対しては、約 5%の差異を生じる。

Meulekamp と名内の手法が  $\beta_{\text{eff}}$  との差異を生じさせる原因を調べるため、Meulekamp と名内の手法で計算されるインポートランス関数と随伴中性子束を比較した。図 5.1 は、Godiva 炉心中心点における、Meulekamp と名内の手法によって計算されたインポートランス関数と随伴中性子束のエネルギースペクトルを比較したものである。インポートランス関数は固定源問題を解いて求められるので、値は絶対値となる。一方、随伴中性子束は固有値問題を解いて求められるので、値は相対値となる。しかし、遅発中性子割合は、随伴中性子束とインポートランス関数で重み付けられた項の比から計算されるので、これらの形が重要となる。従って、以下の 2 つの方法でこれらの関数を規格化して比較する。エネルギースペクトルによる効果を調べるときは、平均核分裂スペクトルで規格化する。即ち、以下の式に従って規格化する。

$$\hat{f}_g(\mathbf{r}_i) = \frac{f_g(\mathbf{r}_i)}{\sum_g \chi_g f_g(\mathbf{r}_i)} \quad (5.17)$$

ここで、 $f_g$  は、 $\Phi_g^\dagger$  または  $G_g^\dagger$  を表し、 $\hat{\phantom{x}}$  は、規格化された関数であることを表す。 $g$  はエネルギー群、 $\mathbf{r}_i$  はある空間離散座標点を表す。空間分布の効果を調べるときは、 $\Phi^\dagger S_f$  と  $G^\dagger S_f$  により、全核分裂源で規格化する。即ち、以下の式に従って規格化する。

$$\hat{f}_g(\mathbf{r}_i) = \frac{f_g(\mathbf{r}_i)}{\sum_i f_g(\mathbf{r}_i) S_{f,g}(\mathbf{r}_i) V(\mathbf{r}_i)} \quad (5.18)$$

ここで、 $V(\mathbf{r}_i)$  は、 $\mathbf{r}_i$  点を含むメッシュ体積である。

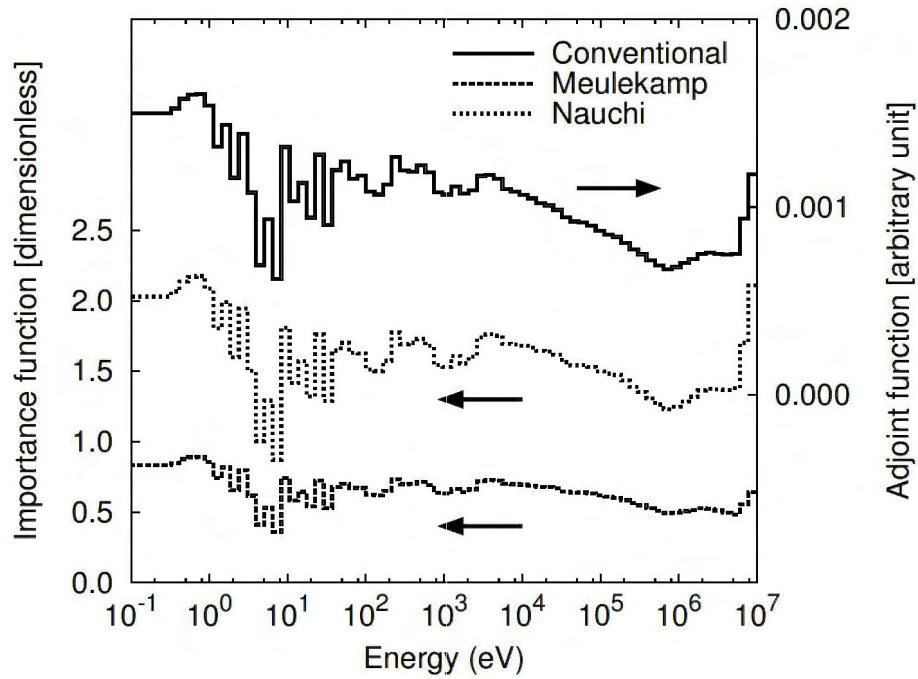
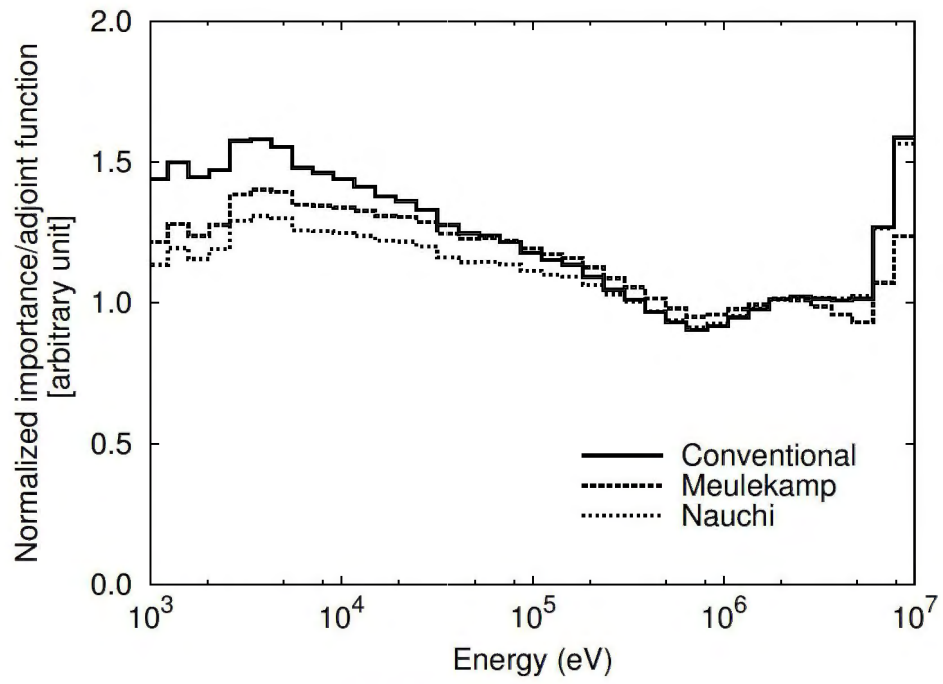


図 5.1: Godiva 炉心中心点における、Meulekamp と名内の手法によって計算されたインポートランス関数と随伴中性子束のエネルギースペクトルの比較

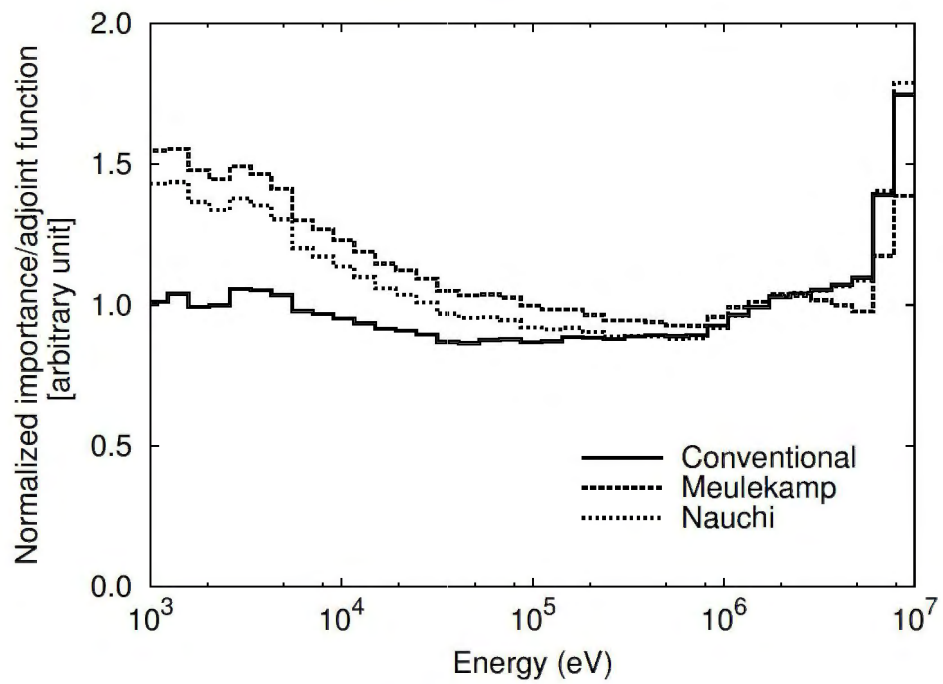
図 5.2(a) と (b) は、Godiva 炉心の炉心平均核分裂スペクトルで規格化された随伴中性子束とインポートランス関数を比較したものである。図 5.3 に示されるように、重要となるエネルギー範囲は、遅発中性子源に対しては、100 keV から 1 MeV (100 keV 領域) であり、全核分裂源に対しては、1 MeV から 10 MeV (1 MeV 領域) である。Meulekamp のインポートランス関数は、随伴中性子束と比較して、100 keV 領域で小さく、1 MeV 領域で大きい。これにより、(5.11) 式の分母  $\langle G^\dagger S_f \rangle$  が小さくなり、分子  $\langle \sum_i G^\dagger S_{f,i}^d \rangle$  が大きくなる。従って、Meulekamp の手法は、実効遅発中性子割合  $\beta_{\text{eff}}$  よりも大きな値を与えることになる。一方、名内のインポートランス関数は、随伴中性子束とほぼ同様のエネルギースペクトルであり、炉心の端における 100 keV 領域で小さい値をとることが分かる。これは、名内の手法で計算した遅発中性子割合が少し過小評価する原因となっていると考えられる。

図 5.4 は、Godiva 炉心に対する、全核分裂源で規格化された随伴中性子束とインポートランス関数を比較したものである。図は、遅発中性子スペクトルのピークがある 498 keV と 639 keV の間のエネルギー群についてプロットしたものである。図から分かるように、インポートランス関数と随伴中性子束の間には大きな違いがある。炉心中心で随伴中性子束はインポートランス関数よりも大きく、炉心端ではその逆になる。しかし、この違いは遅発中性子割合の計算値に影響を与えるものではない。なぜなら、Godiva 炉心は 1 領域均質炉心で、空間依存エネルギースペクトルだけが計算値に影響を与えるからである。

図 5.5(a) と (b) は、Flatop-U 炉心に対する、核分裂スペクトルで規格化された随伴中性子束とインポートランス関数を比較したものである。Flatop-U 炉心の場合、Meulekamp のインポートランス関数は、炉心中心における重要なエネルギー領域において、随伴関数とほぼ同じ



(a) Core center



(b) Core edge

図 5.2: Godiva 炉心に対する、核分裂スペクトルで規格化された随伴中性子束とインポート  
ンス関数の比較



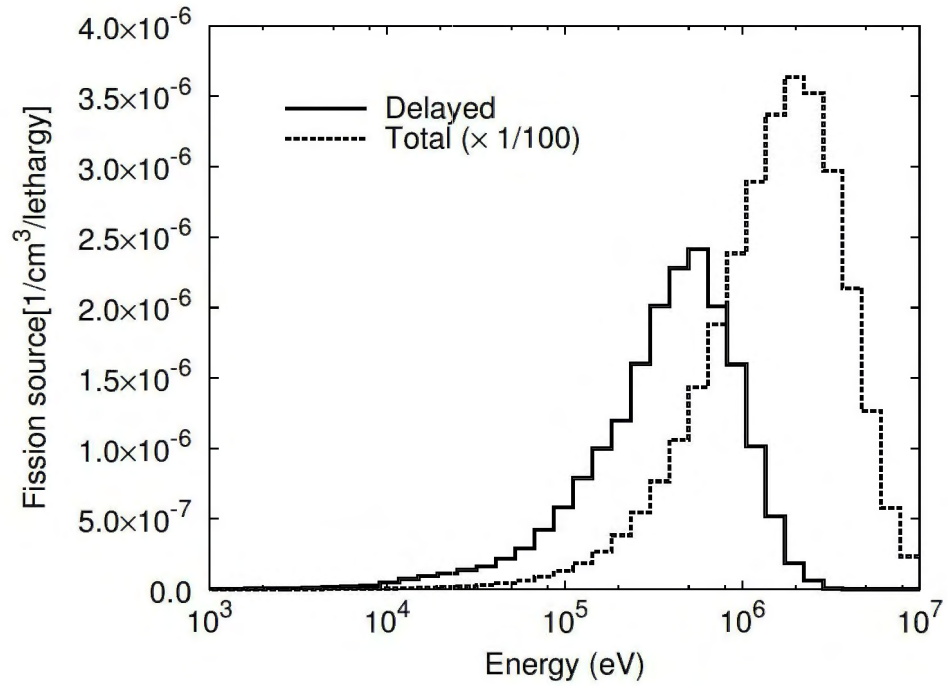


図 5.3: Godiva 炉心中心における、遅発中性子源と全核分裂源のエネルギースペクトルの比較

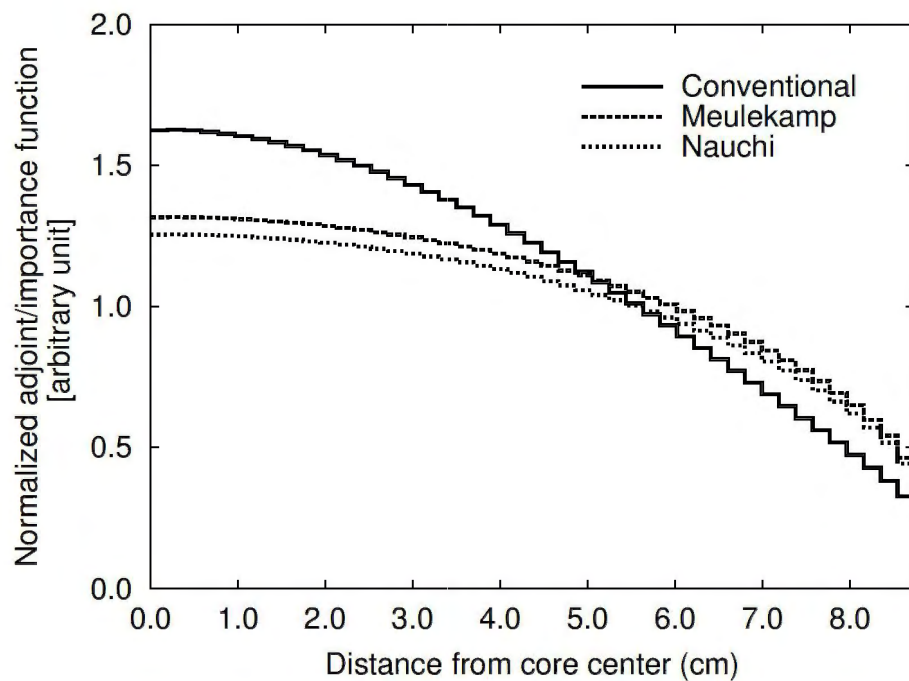
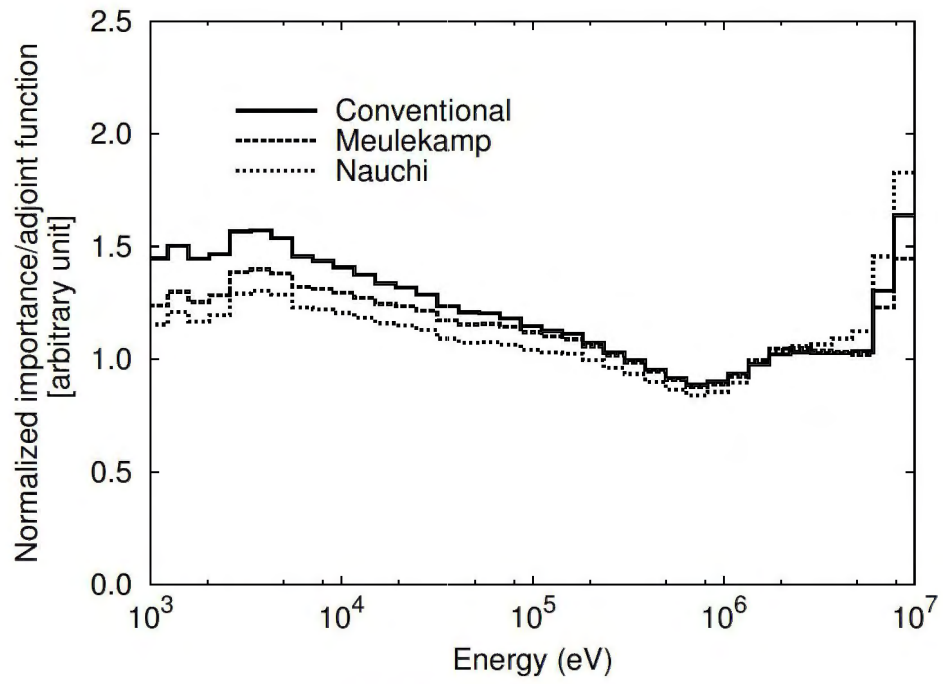
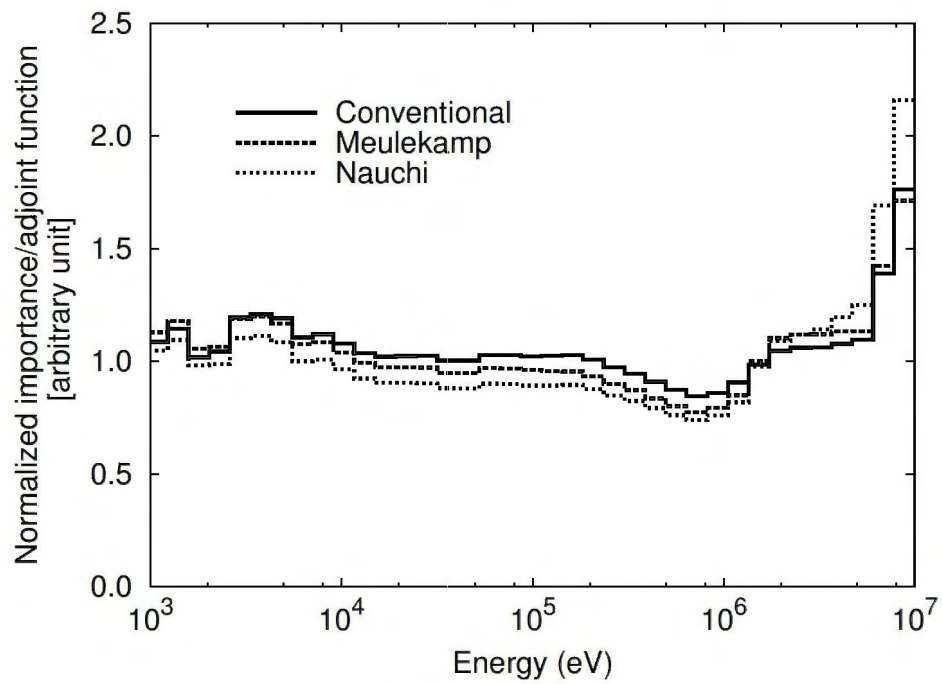


図 5.4: Godiva 炉心に対する、全核分裂源で規格化された随伴中性子束とインポートランス関数の比較 ( $E = 498\text{--}639\text{ keV}$ )



(a) Core center



(b) Core edge

図 5.5: Flattop-U 炉心に対する、核分裂スペクトルで規格化された随伴中性子束とインポートランス関数の比較

形状であるが、1 MeV 領域で随伴中性子束より大きくなる。また、炉心端における 100 keV 領域で小さくなる。これが、(5.11) 式の分母を大きくし、分子を小さくする原因である。従って、Meulekamp の手法は、実効遅発中性子割合と比較して、過小評価する値を与えると考えられる。一方、名内のインポートランス関数は、炉心中心と炉心端両方において、100 keV 領域で随伴中性子束より大きく、1 MeV 領域で小さい。これが、名内の手法で計算した遅発中性子割合が大きく過小評価している原因である。ノーマルウラン反射体が 1 MeV 領域のインポートランス関数を大きくしていることに注意する必要がある。これは、図 5.2 に示される Godiva 炉心のエネルギースペクトルと、図 5.5 に示される Flattop-U 炉心のエネルギースペクトルを比較することから分かる。これは、主にウラン-238 の閾核分裂反応によるものである。

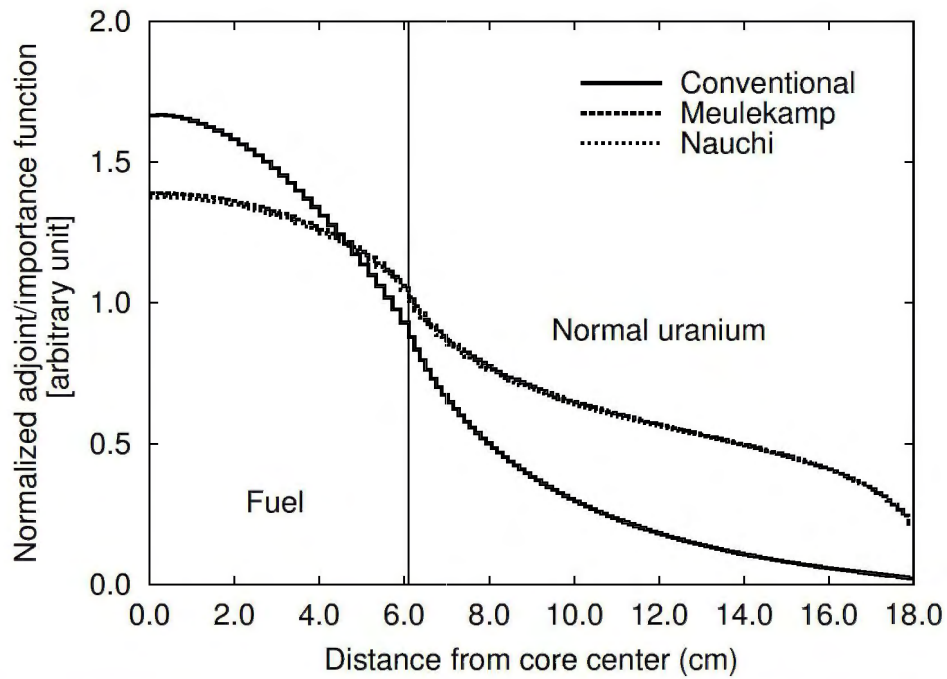
図 5.6(a) と (b) は、Flattop-U 炉心に対する、全核分裂源で規格化された随伴中性子束とインポートランス関数を比較したものである。これらの図は、それぞれ、全核分裂源と遅発中性子源のピークエネルギー群に対する関数をプロットしたものである。Meulekamp と名内の手法は両者とも、燃料領域で随伴中性子束より寄与が小さくなり、反射体領域で寄与が大きくなることが分かる。これらの傾向も、上述の過小評価の一因である。

図 5.7(a) と (b) は、Unreflected-Sphere-U 炉心に対する、核分裂スペクトルで規格化された随伴中性子束とインポートランス関数を比較したものである。予想されるように、熱炉体系では、Meulekamp のインポートランス関数は、名内のインポートランス関数とほぼ同じ形となる。これは、Meulekamp の手法と名内の手法の違いは、随伴源の 1 核分裂当りに放出される中性子数 ( $\nu$  値) が異なるだけだからである。これらは、熱領域においてほぼ一定であり、高速領域における核分裂源からの寄与が無視することができる。核分裂源のエネルギースペクトルは高速炉体系とほぼ同じ形であるので、遅発中性子割合を計算するのに重要となるエネルギー領域も、高速炉と同じである。図 5.7(a) と (b) に見られるように、Meulekamp と名内のインポートランス関数は、炉心中心において、1 MeV 領域で随伴中性子束より大きく、100 keV 領域で小さい。炉心端においては、その逆の傾向となる。従って、エネルギースペクトルの影響は、空間的に相殺するものと考えられる。その結果、Meulekamp と名内の手法で計算された遅発中性子割合は、通常の  $\beta_{\text{eff}}$  とよい一致を示している。

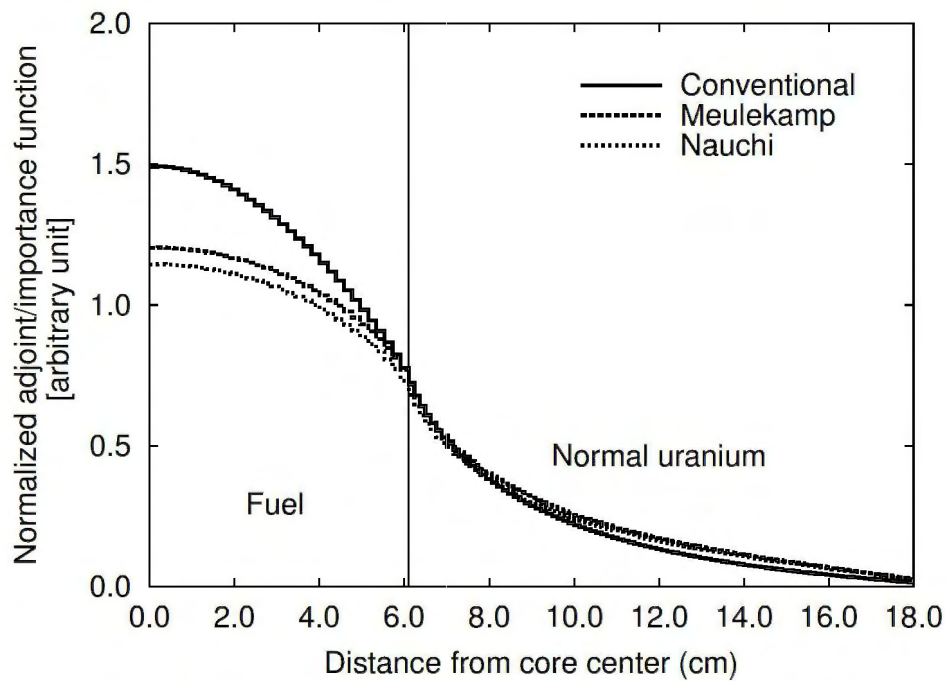
図 5.8 は、Unreflected-Sphere-U 炉心に対する、全核分裂源で規格化された随伴中性子束とインポートランス関数を比較したものである。図は、498 keV と 639 keV の間のエネルギー群に対してプロットしたものである。高速炉体系と同様の傾向が見られる。しかし、空間分布の違いは遅発中性子割合の計算に影響を及ぼさない。これは、遅発中性子割合が、炉心領域での重み付けられた遅発中性子源と全核分裂源の比で計算されるからである。

図 5.9(a) と (b) は、Reflected-Sphere-U 炉心に対する、核分裂スペクトルで規格化された随伴中性子束とインポートランス関数を比較したものである。遅発中性子割合の計算で重要となるエネルギー領域は、反射体無しの場合と同じである。Meulekamp と名内のインポートランス関数は、炉心中心における 100 keV 領域において随伴中性子束より非常に大きくなり、1 MeV 領域で少し小さくなる。一方、炉心端においては、100 keV 領域と 1 MeV 領域ではほぼ同じである。このインポートランス関数の傾向が、Meulekamp と名内の手法で過小評価する原因である。



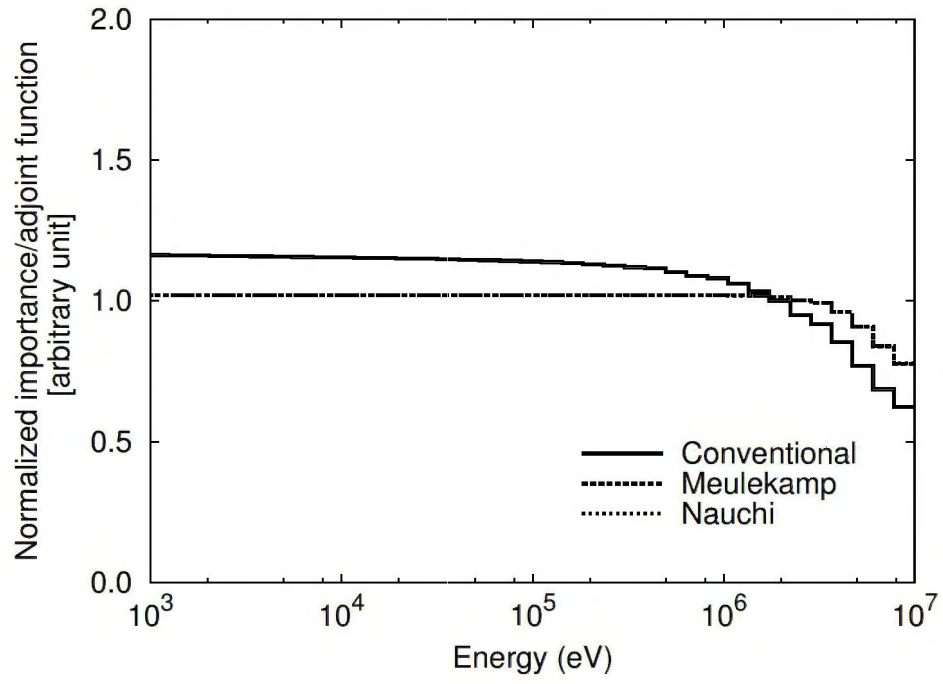


(a) 全核分裂源のピークエネルギー群 ( $E = 1.73\text{--}2.23$  MeV) における関数

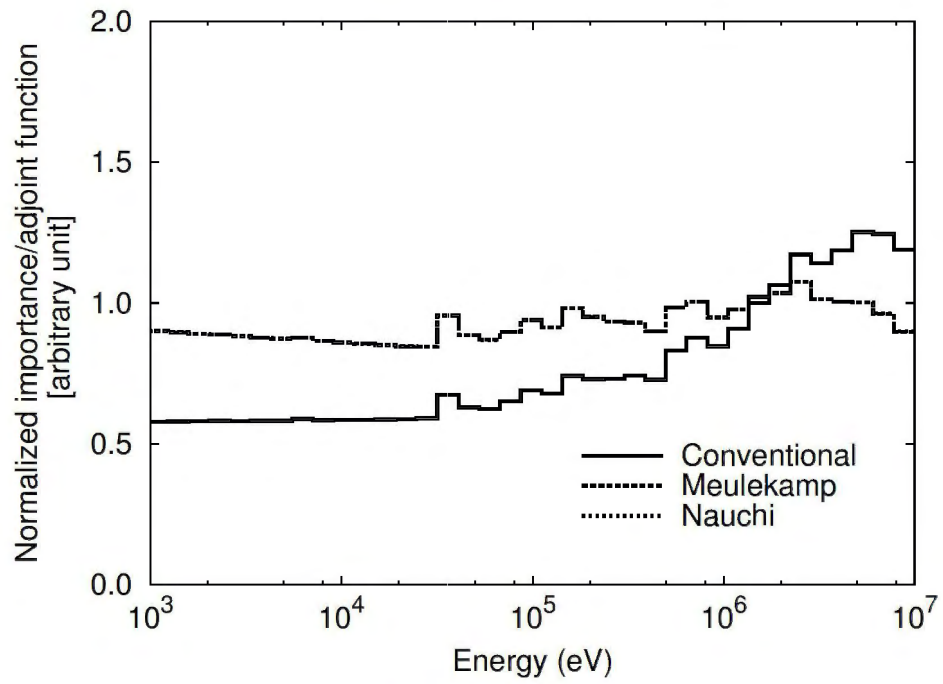


(b) 遅発中性子源のピークエネルギー群 ( $E = 498\text{--}639$  keV) における関数

図 5.6: Flattop-U 炉心に対する、全核分裂源で規格化された随伴中性子束とインポートランス関数の比較



(a) Core center



(b) Core edge

図 5.7: Unreflected-Sphere-U 炉心に対する、核分裂スペクトルで規格化された随伴中性子束とインポートランス関数の比較

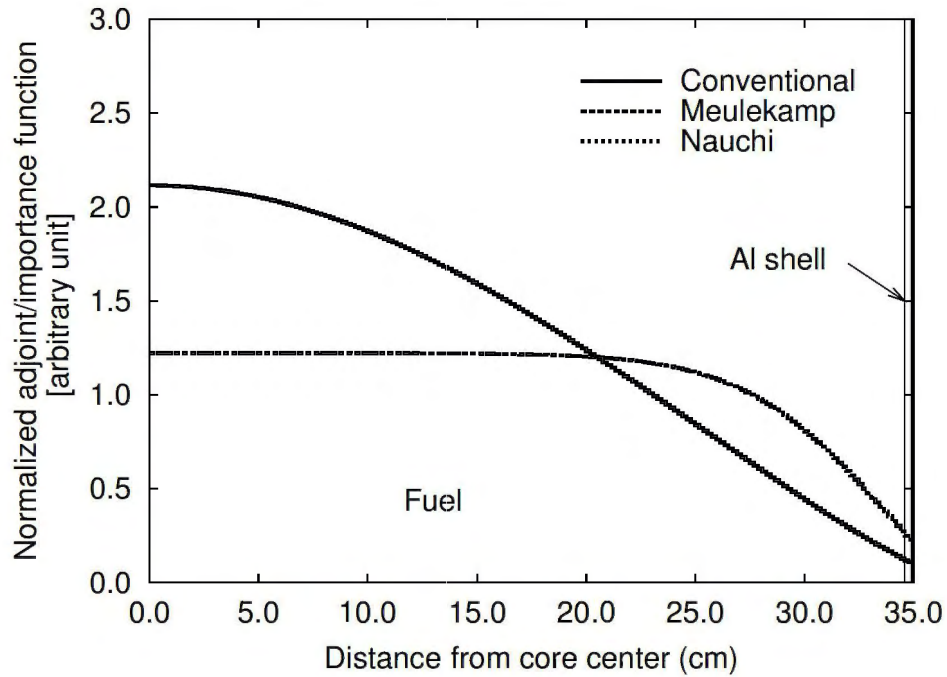


図 5.8: Unreflected-Sphere-U 炉心に対する、全核分裂源で規格化された随伴中性子束とインポートランス関数の比較 ( $E = 498\text{--}639$  keV)

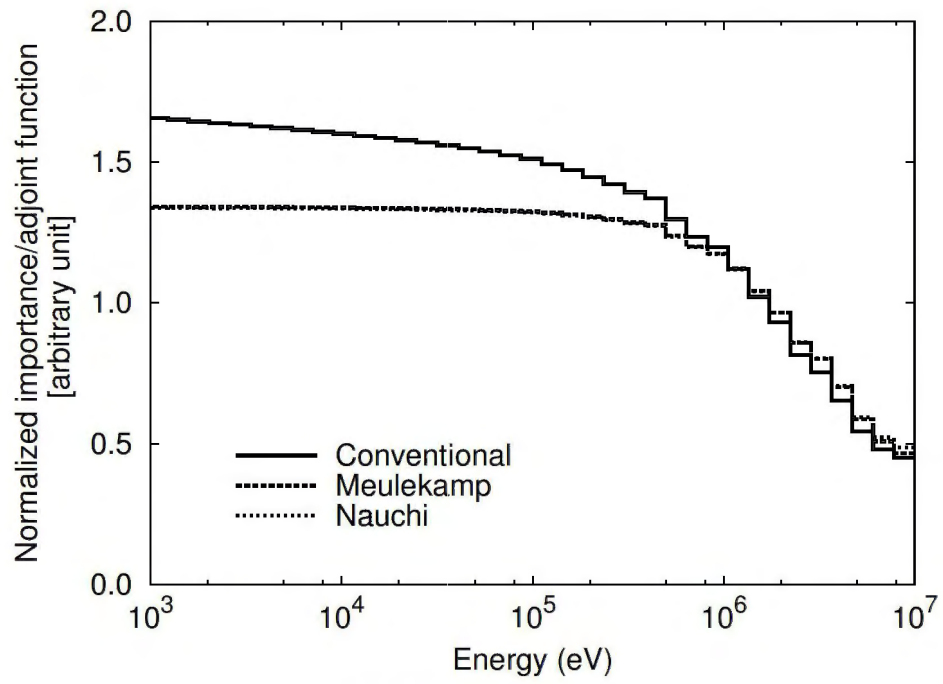
図 5.10 は、Reflected-Sphere-U 炉心に対する、全核分裂源で規格化された随伴中性子束とインポートランス関数を比較したものである。図は、498 keV と 639 keV の間のエネルギー群に対してプロットしたものである。Flat-top-U 炉心と同様、Meulekamp と名内のインポートランス関数は、炉心領域において随伴中性子束より非常に小さくなっている。しかしながら、空間分布の違いは、Unreflected-Sphere-U 炉心と同様の理由で、遅発中性子割合の計算に影響を及ぼさない。

## 5.4 結言

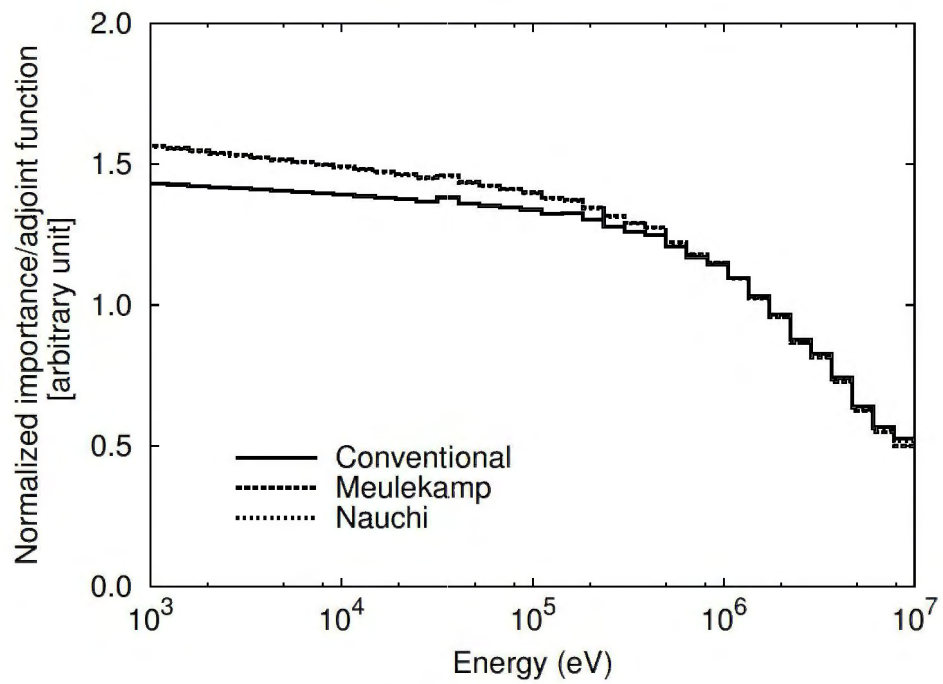
Meulekamp らと名内らによって提案された、連続エネルギーモンテカルロ法によって実効遅発中性子割合  $\beta_{\text{eff}}$  を計算する手法を調べた。これらの手法は、小林によって定義されたインポートランス関数で重み付けられた遅発中性子割合を計算するものであることが、理論的及び数値的に証明された。Meulekamp と名内の手法は近似的な手法であり、物理的には、次世代核分裂確率に基づいて遅発中性子割合を計算している。また、Meulekamp と名内の手法で計算した遅発中性子割合と通常定義の  $\beta_{\text{eff}}$  を決定論的コードで比較するため、ベンチマーク計算を行った。その結果、以下の結論が得られた。

- 裸の高速炉体系に対して、名内の手法は Meulekamp の手法より優れている。これは、100 keV から 10 MeV のエネルギー領域において、インポートランス関数のエネルギースペクトルが随伴中性子束と類似しているからである。Meulekamp の手法は、 $\beta_{\text{eff}}$  と





(a) Core center



(b) Core edge

図 5.9: Reflected-Sphere-U 炉心に対する、核分裂スペクトルで規格化された随伴中性子束とインポートランス関数の比較

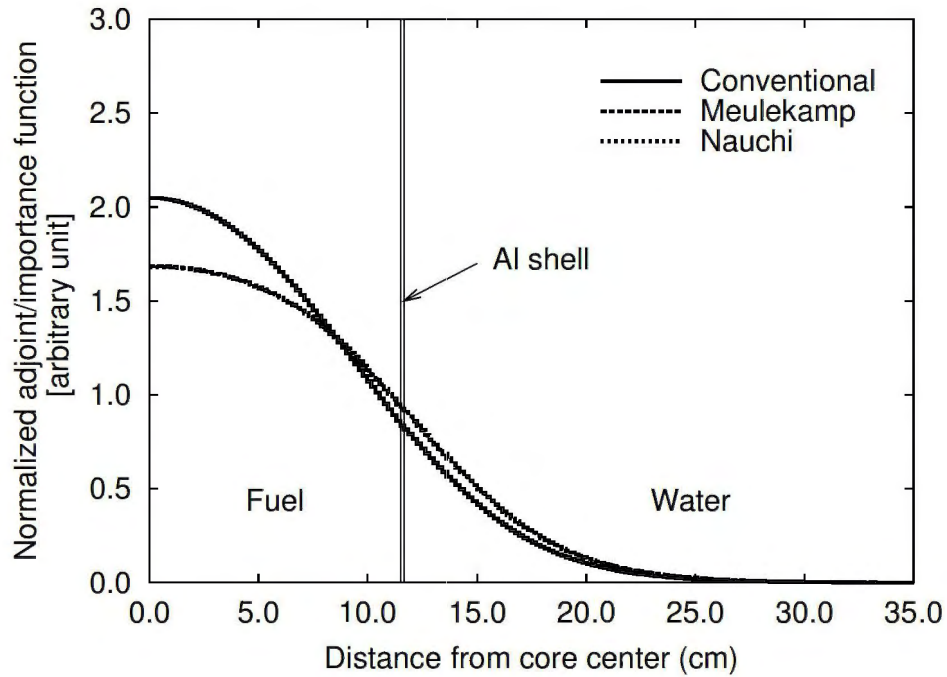


図 5.10: Reflected-Sphere-U 炉心に対する、全核分裂源で規格化された随伴中性子束とインポータンス関数の比較 ( $E = 498\text{--}639$  keV)

比較して約 5% の過小評価となる。

- ノーマルウラン反射体付き高速炉体系に対して、Meulekamp と名内の手法は、それぞれ、 $\beta_{\text{eff}}$  と比較して約 5% と約 10% の過小評価となる。これは、Meulekamp と名内のインポータンス関数が、100 keV と 10 MeV の間のエネルギー領域で、随伴中性子束と異なるエネルギー分布をもつからである。
- 熱炉体系に対して、Meulekamp と名内の手法は、ほぼ同じ値を与える。これは、これらの手法の違いが、随伴源の  $\nu$  値にあり、熱領域におけるこの値がほぼ一定であるからである。
- 反射体のない熱炉体系に対して、Meulekamp と名内の手法で計算された遅発中性子割合は、 $\beta_{\text{eff}}$  と良い一致を示す。しかしながら、これはエネルギースペクトルの相殺効果によって引き起こされている。
- 反射体付き熱炉体系に対して、Meulekamp と名内の手法は、 $\beta_{\text{eff}}$  は少し (約 1%) 過小評価する。これは、炉心中心におけるエネルギースペクトルの差異が原因である。

今後の課題は、モンテカルロ法でいかにして近似のない正確な  $\beta_{\text{eff}}$  を評価するかということである。これについては、最近、いくつかの研究が行われており、次の章で議論する。

## 第6章 モンテカルロ摂動計算手法による実効 遅発中性子割合計算手法の開発

### 6.1 緒言

近年、連続エネルギーモンテカルロ法により実効遅発中性子割合  $\beta_{\text{eff}}$  と中性子生成時間 (neutron generation time)  $\Lambda$  の原子炉動特性パラメータを評価する研究が幅広く行われ、いくつかの手法が提案されている。第5章では、Meulekamp らと名内らによって提案された手法の様々な体系に対する適用性について調べ、それらの手法で計算した遅発中性子割合は、ほとんどのケースにおいて、決定論的手法で計算された  $\beta_{\text{eff}}$  と差異を生じ、特に、ノーマルウラン反射体付き高速炉体系では、約 10% もの過小評価となることが分かった。加えて、両手法とも随伴中性子束重みの遅発中性子割合 ( $\beta_{\text{eff}}$ ) を計算しているのではなく、名内の手法は、小林によって定義されたインポータンス関数 [58] で重み付けられた遅発中性子割合を計算し、Meulekamp の手法は、核分裂断面積を随伴中性子源とした随伴輸送方程式の解で重み付けられた遅発中性子割合を計算していることを理論的に明らかにした。この事実は、Meulekamp と名内の手法が近似を含んでいることを意味している。小林のインポータンス関数と通常の随伴中性子束の違いは、中性子の子孫の寄与を考慮するか否かという点にある。小林のインポータンス関数は、核分裂断面積の随伴源をもつ、非増倍体系に対する輸送方程式の解として定義される。ある世代のある位相空間に存在する中性子が次の世代に引き起こす核分裂の期待値という物理的意味をもつ。即ち、その中性子の子孫の寄与は考慮しない。一方、随伴中性子束は、外部源のない増倍体系に対して定義され、ある中性子の 1 世代分の寄与だけでなく、その中性子の次世代以降の子孫からの寄与も考慮している。Meulekamp らは、手法をコードに実装する際に近似を用いており、言葉によって以下のように説明している。「反復核分裂確率 (iterated fission probability) [20] に基づく  $\beta_{\text{eff}}$  を計算するのではなく、次世代核分裂確率 (next fission probability) にする。」したがって、Meulekamp と名内の手法は、次世代核分裂確率に基づく近似手法であると言える。

$\beta_{\text{eff}}$  を正確に評価するために、随伴中性子束の物理的解釈に基づくアプローチがいくつか試みられている。随伴中性子束の解釈はいくつか存在するが [20, 67–71]、どれも同じ概念に基づいている。Feghhi らは、中性子のインポータンスが、中性子が連続する世代を通して体系の増倍率に対して与える寄与の和であると解釈した [72]。彼らは、随伴中性子束が、通常のモンテカルロ計算から評価することができることを示した。また、彼らの解釈に基づいて、随伴中性子束重みの中性子生成時間を計算した [73]。名内らは、反復核分裂確率が随伴中性子束に比例すると解釈、次世代核分裂確率に基づく手法を拡張し、動特性パラメータ  $\beta_{\text{eff}}$  と  $\Lambda$  を計算した [74]。名内らの解釈は、臨界状態と超臨界状態において、Feghhi らのものと同じであるが、未臨界状態では異なる。反復核分裂確率の解釈に基づくその他の研究も広く行



われている [75–77]。

本章では、 $\beta_{\text{eff}}$  を評価する新しい手法を提案する [78]。この手法は、モンテカルロ摂動計算手法である微分演算子サンプリング法 [31] や相関サンプリング法 [17] とともに固有値法 (eigenvalue methods) を用いる手法である。固有値法は、摂動系と非摂動系に対する固有値の違いから動特性パラメータを導出する手法である [79]。Verboomen らは、固有値法で  $\Lambda$  を計算する手法 [80] を提案しているが、複数のモンテカルロ計算を必要とする。また、疑似吸収断面積と反応度の線形性を仮定しており、複数のモンテカルロ計算結果のばらつきが  $\Lambda$  の評価に大きく影響する可能性がある。

我々の新しい手法では、1 回のモンテカルロ計算で  $\beta_{\text{eff}}$  を計算する。加えて、微分演算子サンプリング法を用いた固有値法は、近似を用いることなく、随伴中性子束で重み付けられた定義どおりの  $\beta_{\text{eff}}$  を与える。本研究ではまた、提案した手法を検証するために、決定論的手法で参照解が得られるような簡単な体系に対する検証計算を行う。

## 6.2 微分演算子サンプリング法を用いた実効遅発中性子割合計算手法

### 6.2.1 基礎式の導出

外部中性子源のない定常状態の中性子輸送方程式は、5.2.1 項の (5.1) 式で与えられる。今、この外部中性子源のない定常状態の体系に対して、遅発中性子数が増加するという摂動を考える。そのとき、摂動パラメータ  $a$  を陽に表して、中性子輸送方程式は以下のように書き表すことができる。

$$L\Phi(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}; a) = \frac{1}{k(a)} S_f(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}; a), \quad (6.1)$$

$$S_f(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}; a) = S_f^p(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}; a) + (1 + a) \sum_i S_{f,i}^d(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}; a), \quad (6.2)$$

$$S_f^p(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}; a) = \sum_k \int dE' \int d\boldsymbol{\Omega}' \chi_p^k(E \leftarrow E', \boldsymbol{\Omega}) \nu_p^k(E') \Sigma_f^k(\mathbf{r}, E') \Phi(\mathbf{r}, E', \boldsymbol{\Omega}'; a), \quad (6.3)$$

$$S_{f,i}^d(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}; a) = \sum_k \int dE' \int d\boldsymbol{\Omega}' \chi_{d,i}^k(E \leftarrow E', \boldsymbol{\Omega}) \nu_{d,i}^k(E') \Sigma_f^k(\mathbf{r}, E') \Phi(\mathbf{r}, E', \boldsymbol{\Omega}'; a) \quad (6.4)$$

ここで、 $a$  は遅発中性子数の相対変化である。 $a = 0$  のときは、(6.1) 式は、非摂動系に対する (5.1) 式となる。(5.5) 式と (6.1) 式を用いると、以下の式が得られる。

$$\frac{1}{k(0)} \frac{k(a) - k(0)}{a} = \frac{\sum_i \langle \Phi^\dagger(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) S_{f,i}^d(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}; a) \rangle}{\left\langle \Phi^\dagger(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) \left[ S_f^p(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}; a) + \sum_i S_{f,i}^d(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}; a) \right] \right\rangle} \quad (6.5)$$

(6.5) 式で  $a \rightarrow 0$  の極限をとり、(5.4) 式の実効遅発中性子割合の定義を用いると

$$\left. \frac{1}{k} \frac{\partial k}{\partial a} \right|_{a=0} = \beta_{\text{eff}} \quad (6.6)$$

となる。本研究では、微分演算子サンプリング法で (6.6) 式の左辺を評価する。(6.6) 式は近似を全く含んでおらず、この式から随伴中性子束で重み付けられた定義どおりの  $\beta_{\text{eff}}$  を評価することができる。

### 6.2.2 モンテカルロコードへの実装

本項では、微分演算子サンプリング法を用いて  $\beta_{\text{eff}}$  を評価する手法について述べる。3.3.2 項で定式化したように、第  $j$  世代の実効増倍率  $k$  に対する 1 次微分係数は、(3.43) 式より以下のように表される。

$$\begin{aligned} \frac{\partial k_j}{\partial a} = & \frac{1}{\int dP S_{f,j}(P; a)} \sum_{m=1}^{\infty} \int dP_m \cdots \int dP_1 \int d\mathbf{r}_0 \\ & \times \left[ \sum_{\ell=1}^m W_f^{(1)}(P_\ell, \cdots, P_1, \mathbf{r}_0; a) W_f(P_\ell, \cdots, P_1, \mathbf{r}_0; a) \right] \tilde{H}(P_\ell, \cdots, P_1, \mathbf{r}_0; a) \quad (6.7) \end{aligned}$$

ここで、摂動パラメータ  $a$  を陽に表した。また、 $W_f^{(1)}$  は、(3.40) 式より

$$\begin{aligned} W_f^{(1)}(P_m, \cdots, P_1, \mathbf{r}_0; a) &= \frac{1}{p_f(P_\ell; a)} \frac{\partial}{\partial a} p_f(P_\ell; a) + \frac{1}{K_s(P_\ell \leftarrow P_{\ell-1}; a)} \frac{\partial}{\partial a} K_s(P_\ell \leftarrow P_{\ell-1}; a) + \cdots \\ &+ \frac{1}{K_s(P_2 \leftarrow P_1; a)} \frac{\partial}{\partial a} K_s(P_2 \leftarrow P_1; a) + \frac{1}{T(P_1 \leftarrow \mathbf{r}_0; a)} \frac{\partial}{\partial a} T(P_1 \leftarrow \mathbf{r}_0; a) \\ &+ \frac{1}{S_{f,j}(\mathbf{r}_0, E_1, \boldsymbol{\Omega}_1; a)} \frac{\partial}{\partial a} S_{f,j}(\mathbf{r}_0, E_1, \boldsymbol{\Omega}_1; a) \quad (6.8) \end{aligned}$$

で定義される。(6.7) 式に対して遅発中性子数が増加するという摂動を考えると、この摂動は遷移カーネルに全く影響を及ぼさないため、最終項の核分裂源の項のみが残る。そのとき、(6.2) 式を (6.8) 式に代入すると、1 次微分係数の重み係数は

$$\begin{aligned} W_f^{(1)}(P_m, \cdots, P_1, \mathbf{r}_0; a) &= \frac{1}{S_{f,j}(\mathbf{r}_0, E_1, \boldsymbol{\Omega}_1; a)} \left( \sum_i S_{f,i,j}^d(\mathbf{r}_0, E_1, \boldsymbol{\Omega}_1; a) + \frac{\partial}{\partial a} S_{f,j}^p(\mathbf{r}_0, E_1, \boldsymbol{\Omega}_1; a) \right. \\ &\quad \left. + (1+a) \frac{\partial}{\partial a} \sum_i S_{f,i,j}^d(\mathbf{r}_0, E_1, \boldsymbol{\Omega}_1; a) \right) \quad (6.9) \end{aligned}$$

となる。ここで、インデックス  $j$  の付いた核分裂源は、第  $j$  世代の核分裂源である。従って、 $a = 0$  における  $k_j$  の 1 次微分係数は以下のように書き表すことができる。

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial k_j}{\partial a} \right|_{a=0} = & \frac{1}{\int dP S_{f,j}(P)} \sum_{m=1}^{\infty} \int dP_m \cdots \int dP_1 \int d\mathbf{r}_0 \\ & \times \left[ \sum_{\ell=1}^m W_f^{(1)}(P_\ell, \cdots, P_1, \mathbf{r}_0) W_f(P_\ell, \cdots, P_1, \mathbf{r}_0) \right] \tilde{H}(P_\ell, \cdots, P_1, \mathbf{r}_0) \quad (6.10) \end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned}
W_f^{(1)}(P_m, \dots, P_1, \mathbf{r}_0) = & \frac{1}{S_{f,j}(\mathbf{r}_0, E_1, \boldsymbol{\Omega}_1)} \left( \sum_i S_{f,i,j}^d(\mathbf{r}_0, E_1, \boldsymbol{\Omega}_1) + \frac{\partial}{\partial a} S_{f,j}^p(\mathbf{r}_0, E_1, \boldsymbol{\Omega}_1; a) \right) \Big|_{a=0} \\
& + \sum_i \frac{\partial}{\partial a} S_{f,i,j}^d(\mathbf{r}_0, E_1, \boldsymbol{\Omega}_1; a) \Big|_{a=0}
\end{aligned} \tag{6.11}$$

であり、変数  $a$  のついていない核分裂源などのパラメータは、非摂動系 ( $a = 0$ ) におけるパラメータを表すものとする。

(6.11) 式の右辺第 1 項は、即発中性子が突然発生しなくなるという直接的な源摂動項であり、右辺第 2 項と 3 項は、直接的摂動により核分裂源が変化するという間接的な源摂動項を表している。よって、第 3 章で開発した源摂動効果を評価する手法と全く同様にして、(6.10) 式を計算することができる。3.3.2 項での議論と同様にして、(6.10) 式を直接的源摂動項 (Direct Perturbed Source) と間接的源摂動項 (Indirect Perturbed Source) に分割する。

$$\frac{\partial k_j}{\partial a} \Big|_{a=0} = \frac{\partial k_{\text{DPS},j}}{\partial a} \Big|_{a=0} + \frac{\partial k_{\text{IPS},j}}{\partial a} \Big|_{a=0} \tag{6.12}$$

ここで、直接的源摂動項は

$$\begin{aligned}
\frac{\partial k_{\text{DPS},j}}{\partial a} \Big|_{a=0} = & \frac{1}{\int dP S_{f,j}(P)} \sum_{m=1}^{\infty} \int dP_m \cdots \int dP_1 \int d\mathbf{r}_0 \\
& \times \left[ \sum_{\ell=1}^m W_{f,\text{DPS}}^{(1)}(P_\ell, \dots, P_1, \mathbf{r}_0) W_f(P_\ell, \dots, P_1, \mathbf{r}_0) \right] \tilde{H}(P_\ell, \dots, P_1, \mathbf{r}_0)
\end{aligned} \tag{6.13}$$

$$W_{f,\text{DPS}}^{(1)}(P_\ell, \dots, P_1, \mathbf{r}_0) = \frac{\sum_i S_{f,i,j}^d(\mathbf{r}_0, E_1, \boldsymbol{\Omega}_1)}{S_{f,j}(\mathbf{r}_0, E_1, \boldsymbol{\Omega}_1)} \tag{6.14}$$

であり、間接的源摂動は

$$\begin{aligned}
\frac{\partial k_{\text{IPS},j}}{\partial a} \Big|_{a=0} = & \frac{1}{\int dP S_{f,j}(P)} \sum_{m=1}^{\infty} \int dP_m \cdots \int dP_1 \int d\mathbf{r}_0 \\
& \times \left[ \sum_{\ell=1}^m W_{f,\text{IPS}}^{(1)}(P_\ell, \dots, P_1, \mathbf{r}_0) W_f(P_\ell, \dots, P_1, \mathbf{r}_0) \right] \tilde{H}(P_\ell, \dots, P_1, \mathbf{r}_0)
\end{aligned} \tag{6.15}$$

$$\begin{aligned}
W_{f,\text{IPS}}^{(1)}(P_\ell, \dots, P_1, \mathbf{r}_0) = & \frac{1}{S_{f,j}(\mathbf{r}_0, E_1, \boldsymbol{\Omega}_1)} \left( \frac{\partial}{\partial a} S_{f,j}^p(\mathbf{r}_0, E_1, \boldsymbol{\Omega}_1; a) \Big|_{a=0} + \sum_i \frac{\partial}{\partial a} S_{f,i,j}^d(\mathbf{r}_0, E_1, \boldsymbol{\Omega}_1; a) \Big|_{a=0} \right)
\end{aligned} \tag{6.16}$$

である。(6.13) 式の直接的源摂動項については、通常の実効増倍率エスティメータに対して遅発中性子のみを追跡することによって評価することができる。従って、 $\partial k_{\text{DPS}}/\partial a$  は、(3.46) 式で表される  $\partial k_{\text{NPS}}/\partial a$  と同様にして計算する。(6.15) 式の間接的源摂動項  $\partial k_{\text{IPS}}/\partial a$  は、



(3.47) 式で表される  $\partial k_{\text{PS}}/\partial a$  と同様にして計算する。即ち、間接的源摂動項は、重み係数を源摂動反復により世代にわたって伝搬させていくことによって評価する。これらの源摂動項を評価するアルゴリズムについては、3.3.5 項で述べたものと全く同じものを用いることができる。

ここで、(6.13) 式の物理的意味を考えてみると興味深いことが分かる。(6.13) 式は、源中性子（スタート中性子）数に対して、遅発中性子が核分裂を引き起こして次の世代に発生する核分裂中性子数を計算している。よって、直接的源摂動項だけを評価すると名内の手法と等価となる。従って、ここで提案する手法は、名内の手法の一般化とみなすことができる。

本研究では、各世代の衝突エスティメータによる  $k_j$  とその1次微分係数  $k'_j(0) = \partial k_j/\partial a|_{a=0}$  から  $\beta_{\text{eff}}$  を計算する。最終的な  $\beta_{\text{eff}}$  の値は、以下のようにして評価する。

$$E[\beta_{\text{eff}}] = \frac{1}{N - N_{\text{skip}}} \sum_{j=N_{\text{skip}}+1}^N \frac{k'_j(0)}{k_j} \quad (6.17)$$

ここで、 $E[\beta_{\text{eff}}]$  は、 $\beta_{\text{eff}}$  の平均値であり、 $N$  と  $N_{\text{skip}}$  は、それぞれ、全バッチ数とスキップバッチ数を表す。分散は以下のようにして評価する。

$$\sigma^2[\beta_{\text{eff}}] = \frac{1}{N - N_{\text{skip}} - 1} \left( \frac{1}{N - N_{\text{skip}}} \sum_{j=N_{\text{skip}}+1}^N \left( \frac{k'_j(0)}{k_j} \right)^2 - E^2[\beta_{\text{eff}}] \right) \quad (6.18)$$

ここで、 $\sigma[\beta_{\text{eff}}]$  は、 $\beta_{\text{eff}}$  の評価値の標準偏差を表す。

## 6.3 相関サンプリング法を用いた実効遅発中性子割合計算手法

### 6.3.1 即発増倍率比法 (Prompt $k$ -ratio method)

本項では、相関サンプリング法により即発増倍率比法 (Prompt  $k$ -ratio method) で  $\beta_{\text{eff}}$  を評価する手法について述べる。即発増倍率比法は、固有値法の1つである。まず、即発増倍率比法に対する基礎式を導出する。(5.1) 式で表される体系において、突然遅発中性子が発生しなくなるという摂動を考える。そのとき、摂動系に対する輸送方程式は以下のように表される。

$$L\Phi^{\text{P}}(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) = \frac{1}{k^{\text{P}}} S_{\text{f}}^{\text{P}}(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) \quad (6.19)$$

ここで、 $\Phi^{\text{P}}$  は摂動系における角度中性子束、 $k^{\text{P}}$  は摂動系における実効増倍率である。摂動理論を用いると、(5.1) 式と (6.19) 式から以下の関係式を導くことができる。

$$1 - \frac{k^{\text{P}}}{k} = \frac{\sum_i \left\langle \Phi^{\dagger}(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) \sum_k \chi_{\text{d},i}^k(E, \boldsymbol{\Omega}) \int dE' \int d\boldsymbol{\Omega}' \nu_{\text{d},i}^k(E') \Sigma_{\text{f}}^k(\mathbf{r}, E') \Phi^{\text{P}}(\mathbf{r}, E', \boldsymbol{\Omega}') \right\rangle}{\left\langle \Phi^{\dagger}(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) \sum_k \int dE' \int d\boldsymbol{\Omega}' \left( \chi_{\text{p}}^k(E \leftarrow E', \boldsymbol{\Omega}) + \sum_i \chi_{\text{d},i}^k(E, \boldsymbol{\Omega}) \right) \Sigma_{\text{f}}^k(\mathbf{r}, E') \Phi^{\text{P}}(\mathbf{r}, E', \boldsymbol{\Omega}') \right\rangle} \quad (6.20)$$

(6.20) 式で1次摂動近似を適用する (即ち、 $\Phi^P \approx \Phi$ ) とすると、(6.20) 式は次のようになる。

$$1 - \frac{k^P}{k} \approx \beta_{\text{eff}} \quad (6.21)$$

実効遅発中性子を評価するために (6.21) 式の近似を使う手法は、Bretscher によって提案されている [81]。(Meulekamp らは、この手法を”prompt method”と呼んでいるが、ここでは、即発増倍率比法 (Prompt  $k$ -ratio method) と呼ぶ。) (6.21) 式を用いると、非摂動系と摂動系で2回のモンテカルロ計算を実行するだけで、 $\beta_{\text{eff}}$  を計算することができる。しかし、モンテカルロ計算で、 $k$  と  $k_p$  を別々に計算すると大きな誤差を伴うことになる。そこで、本研究では、 $\Delta k$  を相関サンプリング法で評価し、 $\beta_{\text{eff}}$  を以下の式から計算する。

$$\beta_{\text{eff}} \approx -\frac{\Delta k}{k}, \quad (6.22)$$

$$\Delta k = k_p - k \quad (6.23)$$

ほとんどの重核種に対して遅発中性子割合は、0.1%のオーダーであるので、(6.22) 式は良い近似になると考えられる。

### 6.3.2 モンテカルロコードへの実装

3.2.1 項で見たように、相関サンプリング法を用いたとき、第  $j$  世代の  $\Delta k$  は、(3.6) 式より以下のように表すことができる。

$$\begin{aligned} \Delta k_j = & \frac{1}{\int S_{f,j}(P) dP} \sum_{m=1}^{\infty} \int dP_m \cdots \int dP_1 \int d\mathbf{r}_0 \\ & \times \left[ \sum_{\ell=1}^m (\Gamma_f(P_\ell, \cdots, P_1, \mathbf{r}_0) - 1) W_f(P_\ell, \cdots, P_1, \mathbf{r}_0) \right] \tilde{H}(P_\ell, \cdots, P_1, \mathbf{r}_0) \end{aligned} \quad (6.24)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \Gamma_f(P_\ell, \cdots, P_1, \mathbf{r}_0) - 1 = & \frac{p_f^*(P_\ell) K_s^*(P_\ell \leftarrow P_{\ell-1}) \cdots K_s^*(P_2 \leftarrow P_1) T^*(P_1 \leftarrow \mathbf{r}_0) \frac{S_{f,j}^*(\mathbf{r}_0, E_1, \boldsymbol{\Omega}_1)}{\int dP'' S_{f,j}^*(P'')}}{p_f(P_\ell) K_s(P_\ell \leftarrow P_{\ell-1}) \cdots K_s(P_2 \leftarrow P_1) T(P_1 \leftarrow \mathbf{r}_0) \frac{S_{f,j}(\mathbf{r}_0, E_1, \boldsymbol{\Omega}_1)}{\int dP'' S_{f,j}(P'')}} - 1 \end{aligned} \quad (6.25)$$

である。(6.24) 式で、遅発中性子が突然発生しなくなるという摂動を考える。この摂動は遷移カーネルに影響を及ぼさないで、(6.25) 式は以下になる。

$$\begin{aligned}\Gamma_f(P_\ell, \dots, P_1, \mathbf{r}_0) - 1 &= \frac{\frac{S_{f,j}^p(\mathbf{r}_0, E_1, \boldsymbol{\Omega}_1)}{\int dP S_{f,j}^p(P)}}{\frac{S_{f,j}(\mathbf{r}_0, E_1, \boldsymbol{\Omega}_1)}{\int dP S_{f,j}(P)}} - 1 \\ &= \frac{S_{f,j}^p(\mathbf{r}_0, E_1, \boldsymbol{\Omega}_1)}{S_{f,j}(\mathbf{r}_0, E_1, \boldsymbol{\Omega}_1)} - 1 + \frac{S_{f,j}^p(\mathbf{r}_0, E_1, \boldsymbol{\Omega}_1)}{S_{f,j}(\mathbf{r}_0, E_1, \boldsymbol{\Omega}_1)} \left( \frac{\int dP S_{f,j}(P)}{\int dP S_{f,j}^p(P)} - 1 \right)\end{aligned}\quad (6.26)$$

ここで、

$$W_{f,\text{DPS}}^*(P_\ell, \dots, P_1, \mathbf{r}_0) = \frac{S_{f,j}^p(\mathbf{r}_0, E_1, \boldsymbol{\Omega}_1)}{S_{f,j}(\mathbf{r}_0, E_1, \boldsymbol{\Omega}_1)} - 1, \quad (6.27)$$

$$W_{f,\text{IPS}}^*(P_\ell, \dots, P_1, \mathbf{r}_0) = \frac{S_{f,j}^p(\mathbf{r}_0, E_1, \boldsymbol{\Omega}_1)}{S_{f,j}(\mathbf{r}_0, E_1, \boldsymbol{\Omega}_1)} \left( \frac{\int dP S_{f,j}(P)}{\int dP S_{f,j}^p(P)} - 1 \right) \quad (6.28)$$

と定義すると、 $W_{f,\text{DPS}}^*$  は、遅発中性子が突然発生しなくなるという直接的な源摂動項を表し、 $W_{f,\text{IPS}}^*$  は、直接的源摂動により核分裂源分布が変化するという間接的な源摂動項を表している。よって、第3章で開発した源摂動効果を評価する手法と全く同様にして、(6.10) 式を計算することができる。3.2.1 項での議論と同様にして、(6.24) 式を直接的源摂動項 (Direct Perturbed Source) と間接的源摂動項 (Indirect Perturbed Source) に分割する。

$$\Delta k_j = \Delta k_{\text{DPS},j} + \Delta k_{\text{IPS},j} \quad (6.29)$$

ここで、直接的源摂動項と間接的源摂動項は、それぞれ、以下のようにして計算することができる。

$$\begin{aligned}\Delta k_{\text{DPS},j} &= \frac{1}{\int S_{f,j}(P) dP} \sum_{m=1}^{\infty} \int dP_m \cdots \int dP_1 \int d\mathbf{r}_0 \\ &\quad \times \left[ \sum_{\ell=1}^m W_{f,\text{DPS}}^*(P_\ell, \dots, P_1, \mathbf{r}_0) W_f(P_\ell, \dots, P_1, \mathbf{r}_0) \right] \tilde{H}(P_\ell, \dots, P_1, \mathbf{r}_0)\end{aligned}\quad (6.30)$$

$$\begin{aligned}\Delta k_{\text{IPS},j} &= \frac{1}{\int S_{f,j}(P) dP} \sum_{m=1}^{\infty} \int dP_m \cdots \int dP_1 \int d\mathbf{r}_0 \\ &\quad \times \left[ \sum_{\ell=1}^m W_{f,\text{IPS}}^*(P_\ell, \dots, P_1, \mathbf{r}_0) W_f(P_\ell, \dots, P_1, \mathbf{r}_0) \right] \tilde{H}(P_\ell, \dots, P_1, \mathbf{r}_0)\end{aligned}\quad (6.31)$$

(6.30) 式の直接的源摂動項は、通常の実効増倍率エスティメータに対して、即発中性子のみを追跡することによって評価する。(6.31) 式の間接的源摂動項は、3.2.1 項で示したように、(3.12) 式で表される  $\Delta k_{\text{PS}}$  と同様にして計算する。即ち、間接的源摂動項は、重み係数の源摂動反復によって計算する。これらの源摂動項を計算するアルゴリズムは、3.2.3 項で述べたものと同じものを用いる。



本研究では、各世代の衝突エスティメータで評価された  $k_j$  と  $\Delta k_j$  から  $\beta_{\text{eff}}$  を計算する。最終的な  $\beta_{\text{eff}}$  の値と分散は以下の式で計算する。

$$E[\beta_{\text{eff}}] = \frac{1}{N - N_{\text{skip}}} \sum_{j=N_{\text{skip}}+1}^N \left( -\frac{\Delta k_j}{k_j} \right), \quad (6.32)$$

$$\sigma^2[\beta_{\text{eff}}] = \frac{1}{N - N_{\text{skip}} - 1} \left( \frac{1}{N - N_{\text{skip}}} \sum_{j=N_{\text{skip}}+1}^N \left( -\frac{\Delta k_j}{k_j} \right)^2 - E^2[\beta_{\text{eff}}] \right) \quad (6.33)$$

## 6.4 検証計算

### 6.4.1 ベンチマーク体系と計算手法

検証計算は、第5章で用いられた体系と全く同じ体系について行う。即ち、5.3.1 項に示されている 12 の体系である。便宜を図るため、再び以下に示しておく。

- Godiva (HEU-MET-FAST-001): 高濃縮ウラン ( $\sim 94$  wt.% U-235) 裸の体系
- Jezebel (PU-MET-FAST-001): 金属プルトニウム-239 ( $\sim 95$  at.% Pu-239) 裸の体系
- Jezebel-233 (U233-MET-FAST-001): 金属ウラン-233 ( $\sim 98$  at.% U-233) 裸の体系
- Flattop-U (HEU-MET-FAST-028): ノーマルウラン (normal uranium) 反射体付き高濃縮ウラン球 ( $\sim 93$  wt.% U-235)
- Flattop-Pu (PU-MET-FAST-006): ノーマルウラン反射体付きプルトニウム球 ( $\sim 94$  at.% Pu-239)
- Flattop-233 (U233-MET-FAST-006): ノーマルウラン反射体付きウラン-233 球 ( $\sim 98$  at.%)
- Unreflected-Sphere-U (HEU-SOL-THERM-013-001): 反射体のない硝酸濃縮ウラン溶液 ( $\sim 93$  wt.% U-235)
- Unreflected-Sphere-Pu (PU-SOL-THERM-009-003): 反射体のない硝酸プルトニウム溶液 ( $\sim 97$  wt.% Pu-239)
- Unreflected-Sphere-233 (U233-SOL-THERM-001-001): 反射体のない硝酸ウラン-233 溶液 ( $\sim 98$  wt.% U-233)
- Reflected-Sphere-U (HEU-SOL-THERM-009-001): 水反射体付き酸フッ化濃縮ウラン溶液 (enriched uranium oxyfluoride solution) ( $\sim 93$  wt.% U-235)
- Reflected-Sphere-Pu (PU-SOL-THERM-001-001): 水反射体付き硝酸プルトニウム溶液 ( $\sim 95$  wt.% Pu-239)

- Reflected-Sphere-233 (U233-SOL-THERM-005-001): 水反射体付き硝酸ウラン-233 溶液 (~ 99 wt.% U-233)

すべて ICSBEP ハンドブックに掲載されており、すべて決定論的手法で参照解が得られるような単純な体系である。選択の基準は以下の観点に基づいている。

- 高速炉体系か熱炉体系か
- 重核種の種類: ウラン系か、プルトニウム系か、U-233 系か
- 反射体付きか反射体無しか

モンテカルロ法で  $\beta_{\text{eff}}$  を評価するため、本研究で提案した手法を連続エネルギーモンテカルロコード MVP [27] に実装した。評価済み核データライブラリは、JENDL-3.3 [52] を用いる。すべてのケースにおいて、全ヒストリー数 4,100 万ヒストリー (バッチサイズ 1 万ヒストリー、スキップバッチ 100, 有効バッチ数 4,000) で計算を行った。

参照解は、離散座標輸送計算による決定論的手法で得られた結果を採用する。参照解は、既に、第 5 章で得られており、その値は表 5.3 に記載されている。参照解の計算手法については、5.3.1 項で記述している通りである。

#### 6.4.2 計算結果

表 6.1 は、微分演算子サンプリング法で計算した  $\beta_{\text{eff}}$  と決定論的手法で計算した  $\beta_{\text{eff}}$  (参照解) を比較したものである。微分演算子サンプリング法で計算した結果は、直接的源摂動項

表 6.1: 微分演算子サンプリング法と決定論的手法で計算した  $\beta_{\text{eff}}$  の比較

カテゴリ	炉心	$\beta_{\text{eff}}$ (pcm)		
		決定論 (参照解)	モンテカルロ 直接源摂動 効果のみ	モンテカルロ 直接と間接 源摂動効果
Fast, Bare	Godiva	632.6	626.9(1.8)*	630.8(3.5)
	Jezebel	182.9	181.5(0.9)	180.3(2.1)
	Jezebel-233	291.9	291.1(1.3)	293.1(2.6)
Fast, Reflected (normal U)	Flatop-U	678.5	610.1(1.7)	679.8(3.4)
	Flatop-Pu	281.0	259.9(1.0)	280.0(2.3)
	Flatop-233	377.6	339.7(1.2)	375.2(2.7)
Thermal, Unreflected	Unreflected-Sphere-U	716.1	712.2(2.2)	721.1(5.4)
	Unreflected-Sphere-Pu	225.4	225.2(1.3)	228.8(2.8)
	Unreflected-Sphere-233	298.9	295.9(1.4)	300.8(3.4)
Thermal, Reflected (water)	Reflected-Sphere-U	842.4	834.8(2.8)	849.9(7.5)
	Reflected-Sphere-Pu	275.2	269.1(1.7)	270.7(4.1)
	Reflected-Sphere-233	350.4	348.7(1.8)	352.0(4.8)

\* 括弧内の値は 1 標準偏差の統計誤差を表す。



のみから評価した  $\beta_{\text{eff}}$  と、直接的源摂動項と間接的源摂動項を含む  $\beta_{\text{eff}}$  の2つを載せている。間接的源摂動項の評価については、源摂動反復が10回のときの結果を示している。間接的源摂動項に対する源摂動反復の収束性については、後ほど調べる。間接的源摂動項を考慮しない場合でも、ノーマルウラン反射体付き高速炉体系以外については、比較的参照解と近い値を与えるが、多少過小評価する傾向が見られる。ノーマルウラン反射体付き高速炉体系については、間接的源摂動項を考慮しない場合、10%以上大きく過小評価する。一方、間接的源摂動項を考慮した場合、微分演算子サンプリング法による結果は、すべての体系について2標準偏差以内で参照解と一致する。特に、ノーマルウラン反射体付き高速炉体系に対して、間接的源摂動項を考慮することにより、計算値が大きく改善される。

間接的源摂動項に対する源摂動反復の収束性を調べるために、ウラン体系における  $\beta_{\text{eff}}$  の源摂動反復回数に対する依存性を調べた。図 6.1(a)-(d) は、ウラン体系に対して、微分演算子サンプリング法を用いて計算した  $\beta_{\text{eff}}$  の源摂動反復回数に対する依存性を示したものである。源摂動反復が0回のときの  $\beta_{\text{eff}}$  値は、間接的源摂動効果を含まない計算値を表している。誤差棒は、1標準偏差の統計誤差を表しており、源摂動反復回数が増えるにつれて大きくなる。図から分かるように、源摂動反復が4回以上になると、1標準偏差の中で値がばらつくようになり、間接的源摂動効果は十分一定値に収束したとみなすことができる。

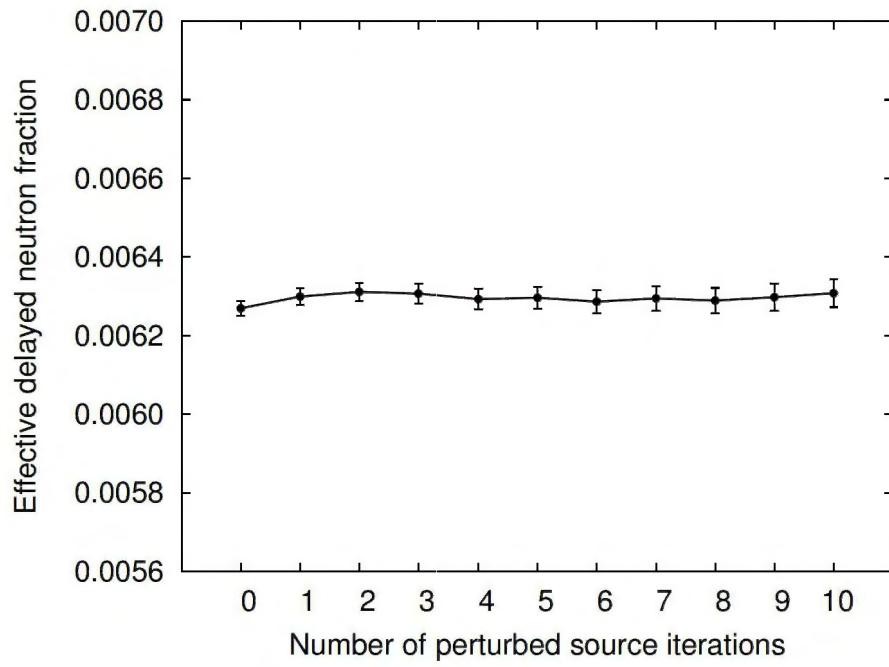
表 6.2 は、相関サンプリング法と即発増倍率比法を組み合わせで計算した  $\beta_{\text{eff}}$  と決定論的手法で計算した  $\beta_{\text{eff}}$  (参照解) を比較したものである。相関サンプリング法で計算した結果は、直接的源摂動項のみの場合も、直接的及び間接的源摂動項を考慮した場合も、微分演算子サンプリング法で計算した結果とほぼ同じ結果を与える。従って、表 6.1 に対する結果と同じこ

表 6.2: 相関サンプリング法と決定論的手法で計算した  $\beta_{\text{eff}}$  の比較

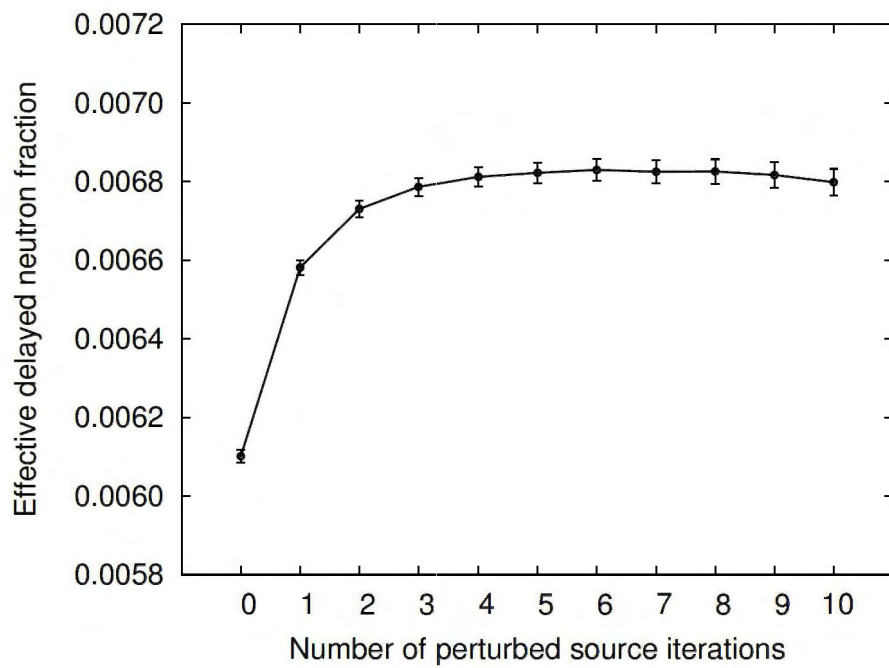
カテゴリ	炉心	$\beta_{\text{eff}}$ (pcm)		
		決定論 (参照解)	モンテカルロ 直接源摂動 効果のみ	モンテカルロ 直接と間接 源摂動効果
Fast, Bare	Godiva	632.6	626.9(1.8)*	631.3(3.6)
	Jezebel	182.9	181.5(0.9)	180.3(2.1)
	Jezebel-233	291.9	291.1(1.3)	293.7(2.6)
Fast, Reflected (normal U)	Flattop-U	678.5	610.1(1.7)	679.0(3.5)
	Flattop-Pu	281.0	259.9(1.0)	280.5(2.4)
	Flattop-233	377.6	339.7(1.2)	374.8(2.8)
Thermal, Unreflected	Unreflected-Sphere-U	716.1	712.2(2.2)	721.3(5.5)
	Unreflected-Sphere-Pu	225.4	225.2(1.3)	228.6(2.8)
	Unreflected-Sphere-233	298.9	295.9(1.4)	301.1(3.5)
Thermal, Reflected (water)	Reflected-Sphere-U	842.4	834.8(2.8)	849.9(7.6)
	Reflected-Sphere-Pu	275.2	269.1(1.7)	270.6(4.2)
	Reflected-Sphere-233	350.4	348.7(1.8)	352.4(4.8)

\* 括弧内の値は1標準偏差の統計誤差を表す。



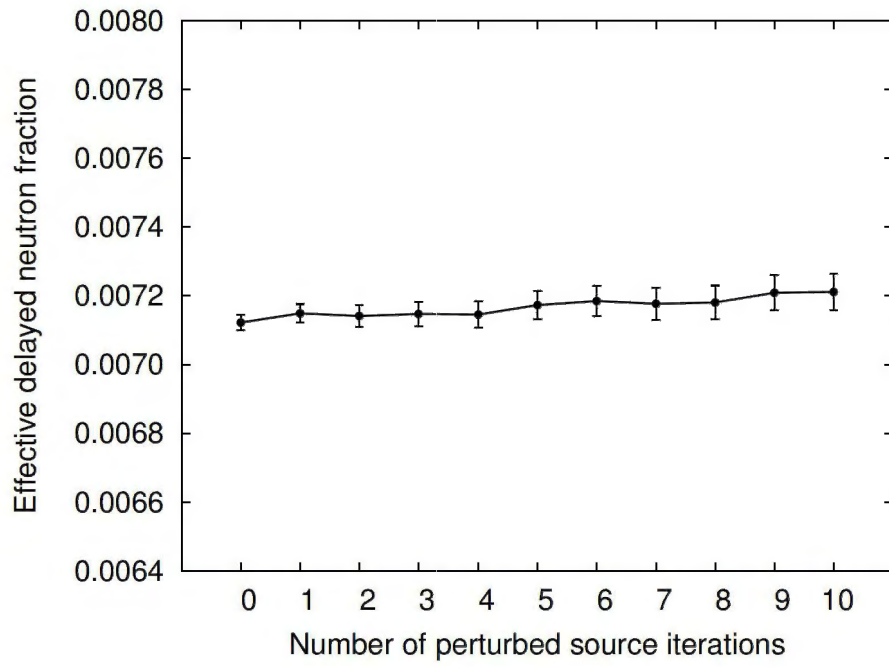


(a) Godiva

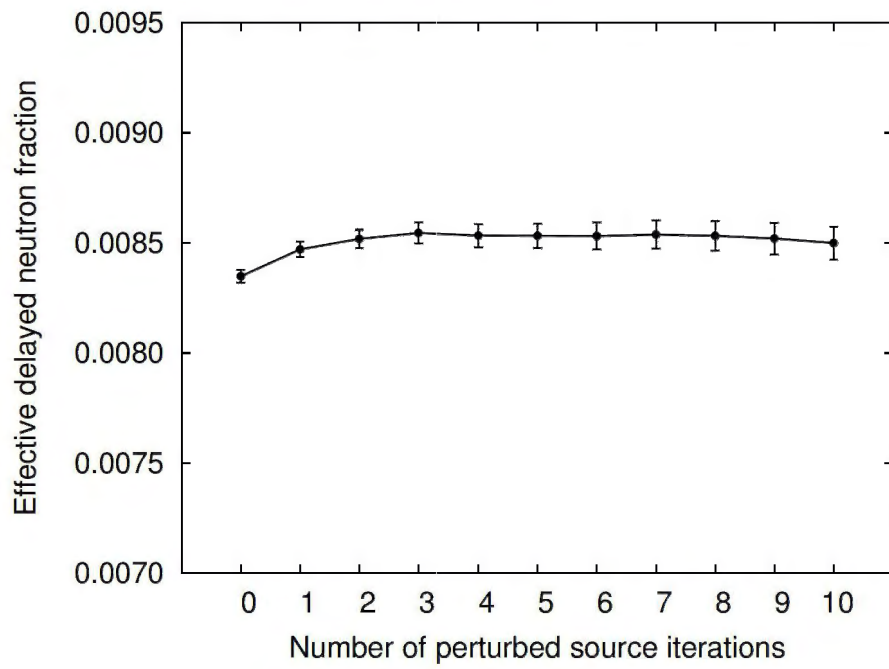


(b) Flattop-U

図 6.1: 微分演算子サンプリング法を用いて計算した  $\beta_{\text{eff}}$  の源摂動反復回数に対する依存性



(c) Unreflected-Sphere-U



(d) Reflected-Sphere-U

図 6.1: 微分演算子サンプリング法を用いて計算した  $\beta_{\text{eff}}$  の源摂動反復回数に対する依存性

とが言える。即ち、間接的源摂動項を考慮しない場合は、少し過小評価の傾向があり、ノーマルウラン反射体付き高速炉体系については、特に大きく過小評価する。一方、間接的源摂動項を考慮した場合、参照解と非常によく一致する。これは、相関サンプリング法による即発増倍率比法が近似を含む手法であるが、非常によい結果を与えることを示している。微分演算子サンプリング法と相関サンプリング法で、参照解に対する計算値の傾向が同じであることに注意されたい。これは、同じランダムヒストリーを用いて計算していることに起因する。

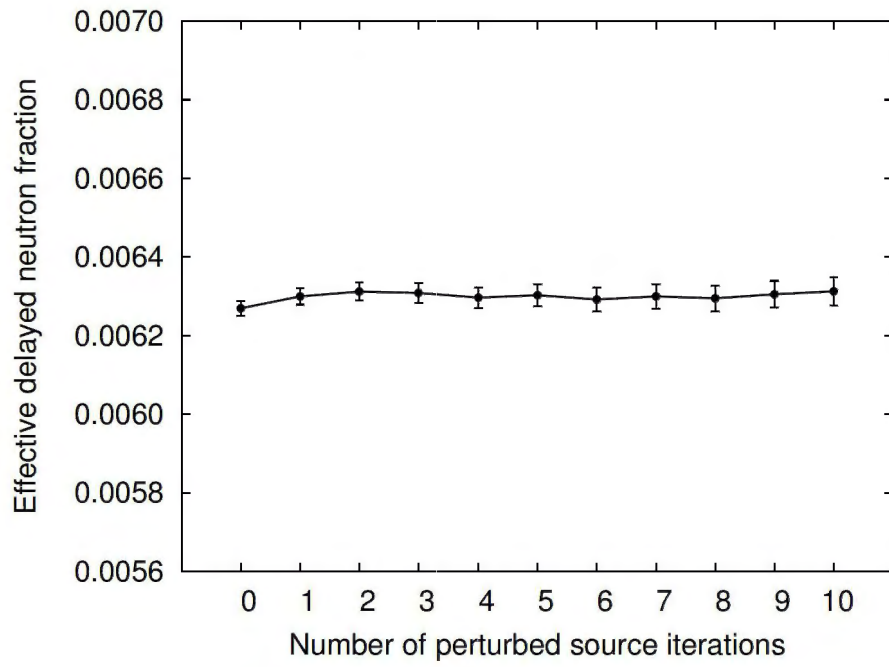
相関サンプリング法による即発増倍率比法についても、間接的源摂動項に対する源摂動反復の収束性を調べるために、ウラン体系における  $\beta_{\text{eff}}$  の源摂動反復回数に対する依存性を調べた。図 6.2(a)-(d) は、ウラン体系に対して、相関サンプリング法及び即発増倍率比法を用いて計算した  $\beta_{\text{eff}}$  の源摂動反復回数に対する依存性を示したものである。源摂動反復が 0 回の際の  $\beta_{\text{eff}}$  値は、間接的源摂動効果を含まない計算値を表している。図 6.1 と比較すると分かるように、微分演算子サンプリング法とほぼ同じ傾向を示す。相関サンプリング法を用いた場合でも、源摂動反復を 10 回以上すれば、間接的源摂動効果は十分収束しているとみなすことができる。

## 6.5 結言

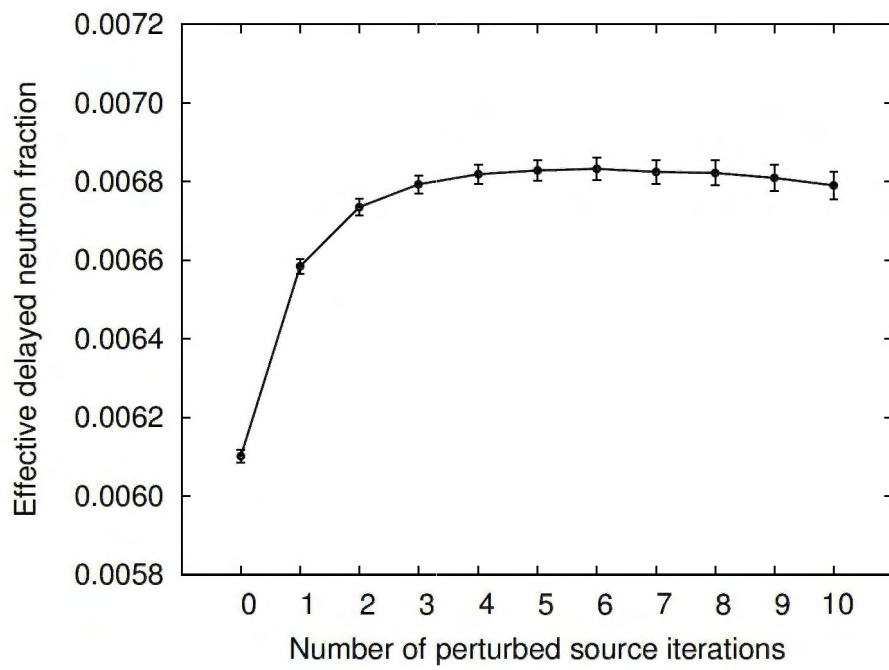
本研究において、モンテカルロ法により実効遅発中性子割合  $\beta_{\text{eff}}$  を計算する、新たな 2 つの手法を提案した。1 つは、微分演算子サンプリング法を固有値法で適用した手法である。この手法を用いると、近似を用いることなく、随伴中性子束で重み付けられた定義どおりの  $\beta_{\text{eff}}$  を評価することが可能である。もう 1 つの手法は、相関サンプリング法を即発増倍率比法で適用した手法である。こちらの手法は近似を含んでいる。これら手法を用いて  $\beta_{\text{eff}}$  を計算したときの予測精度を調べるため、ベンチマーク計算を行った。その結果、以下の結論が得られた。

- 間接的源摂動効果を考慮すれば、微分演算子サンプリング法と固有値法により、随伴中性子束で重み付けられた定義どおりの  $\beta_{\text{eff}}$  を評価することが可能である。間接的源摂動効果は、十分な源摂動反復回数をとることによって評価することができる。
- 間接的源摂動効果を考慮しない場合でも、裸の高速炉体系、裸の熱炉体系、水反射体付き熱炉体系については、割と精度良く  $\beta_{\text{eff}}$  を計算することができる。しかし、ノーマルウラン反射体付き高速炉体系については、間接的源摂動効果を考慮しない、大きく (10%以上) 過小評価する。間接的源摂動効果を考慮することにより、すべての体系で、 $\beta_{\text{eff}}$  の評価値が改善される。
- 相関サンプリング法と即発増倍率比法は、微分演算子サンプリング法と固有値法の結果とほぼ同等の結果を与える。
- $\beta_{\text{eff}}$  は、モンテカルロ法における摂動計算手法の枠組みで計算することが可能である。摂動計算と  $\beta_{\text{eff}}$  計算を同じ枠組みで実行できるという利点がある。



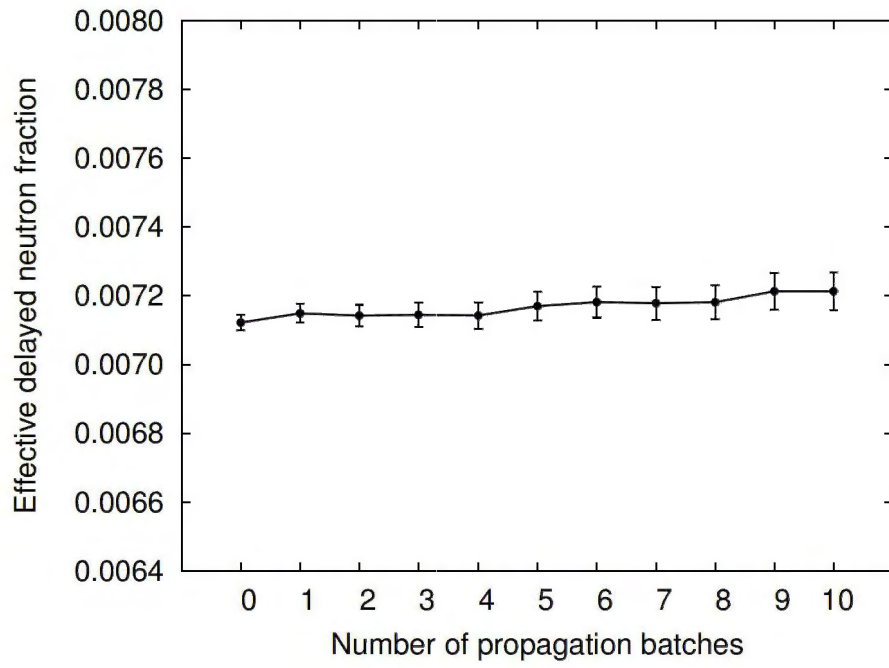


(a) Godiva

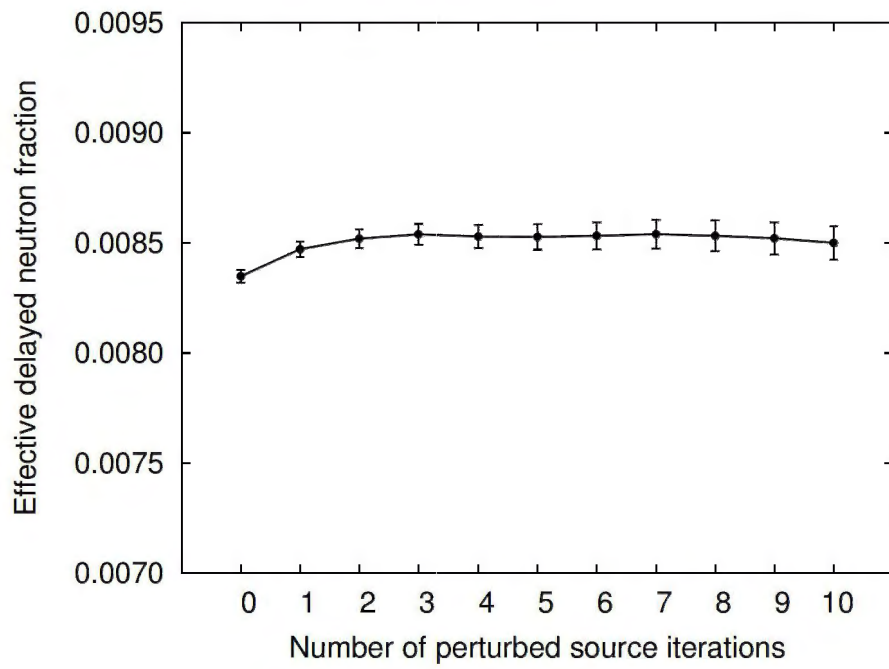


(b) Flattop-U

図 6.2: 相関サンプリング法を用いて計算した  $\beta_{\text{eff}}$  の源摂動反復回数に対する依存性



(c) Unreflected-Sphere-U



(d) Reflected-Sphere-U

図 6.2: 相関サンプリング法を用いて計算した  $\beta_{\text{eff}}$  の源摂動反復回数に対する依存性

今後の課題としては、遅発中性子に関する評価済み核データの妥当性評価が挙げられる。これは、計算値と実験値を比較することによって実施することができる。本研究で提案した手法は、そのような妥当性評価に適している。なぜなら、連続エネルギーモンテカルロ法により、近似を用いることなく、随伴中性子束で重み付けられた定義どおりの  $\beta_{\text{eff}}$  を計算することができ、本研究でその精度が証明されているからである。もう1つの課題としては、正確な誤差評価が挙げられる。現在の誤差評価では、間接的源摂動効果を評価する際、移動平均による手法による相関を無視している。正確な誤差評価を行うためには、その相関を考慮しなければならない。



## 第7章 結論

計算機技術の進歩とともに今後ますます有用になるであろうモンテカルロ法の、原子炉炉心解析分野における適用範囲を拡張するため、モンテカルロ法による摂動計算手法と実効遅発中性子割合計算手法について研究を行った。

第2章では、微積分型輸送方程式から衝突密度方程式を導出、更に、それに対するノイマン級数解を導出し、モンテカルロ法におけるランダムウォークを定式化した。この定式化については、粒子輸送モンテカルロ法の教科書でよく見受けられるものであるが、それは固定源問題を対象とした定式化であり、炉心解析でよく用いられる固有値問題を取り扱うには不向きであった。本研究において、固有値問題を対象とした定式化を行い、核分裂源の変化を陽に取り扱えるようにした。この定式化は、以降の章において、微分演算子サンプリング法と源摂動効果の議論をする際に、非常に重要な役割を果たした。

第3章では、モンテカルロ法による摂動計算手法である相関サンプリング法と微分演算子サンプリング法の固有値問題への適用性について調べた。これまで、体系に摂動が加えられることにより核分裂源が変化する効果（源摂動効果）の重要性は認識されていたものの、定量的には考慮されていなかった。本研究において、相関サンプリング法と微分演算子サンプリング法に対する源摂動効果を考慮する新たな手法及びアルゴリズムを開発し、連続エネルギーモンテカルロコードで検証、実効増倍率に対する源摂動効果を定量的に評価することが可能となった。その結果、以下のようなことが明らかとなった。

- ほとんどすべての摂動問題において源摂動効果を考慮する必要がある。局所的な摂動問題では大きな源摂動効果の影響があり、体系全体で一様な摂動問題の場合でも多少源摂動効果の影響がある。
- 相関サンプリング法を固有値問題における摂動問題に適用した場合、本研究で開発した手法で源摂動効果を評価することが可能である。また、理論的に近似のない、実効増倍率の変化量を評価することが期待できる。しかし、摂動量が大きい場合、分散が発散してしまい、信頼性のある結果を得ることは難しい。
- 微分演算子サンプリング法を固有値問題における摂動問題に適用した場合、本研究で開発した手法で源摂動効果を評価することが可能である。また、1次の源摂動効果については、本研究で開発したアルゴリズムにより精度よく評価することができる。しかし、摂動量が大きい場合、高次の微分係数から評価される高次の Taylor 級数展開項を無視する影響があり、正確な解を得ることができない可能性がある。

第4章では、微分演算子サンプリング法による Taylor 級数展開項を評価する手法のサンプル反応度値に対する適用性について調べた。本章の目的は、実際の炉物理実験で測定さ



れるサンプル反応度価値や物質置換反応度価値をモンテカルロ法で精度良く計算できる手法を開発することである。これらの反応度価値は、物質の密度が 100% から 0%（もしくはその逆）へ変化する摂動による実効増倍率の変化量であり、第 3 章で明らかとなったように、分散が発散してしまう相関サンプリング法は、統計誤差の観点から不向きである。そこで、微分演算子サンプリング法を用いて任意次数の微分係数及び源摂動効果を計算できるように拡張し、任意次数の Taylor 級数近似によりサンプル反応度価値を評価した。実際のサンプル反応度価値測定実験を基にした計算ベンチマークを実施し、以下のことが分かった。

- 高速炉裸の球体系における中心サンプル反応度価値問題に対しては、源摂動効果を含む 2 次の Taylor 級数近似で精度良く反応度価値を計算することができる。3 次以上の Taylor 級数項の影響はほとんど無視できる。
- 本研究で開発したアルゴリズムを用いても、高次になればなるほど微分係数の評価を精度よく計算するのは難しくなる。源摂動を含まない微分係数については、信頼性のある (統計誤差の小さい) 値を得ることができるが、源摂動のみの微分係数については、信頼性のある値を得ることが難しくなる。
- TCA 炉心に対する Np-237 サンプル反応度価値問題で示したように、ある程度高次の微分係数まで Taylor 級数展開項を評価しても、正確な解を得られない場合がある。

TCA 炉心における Np-237 サンプル反応度価値問題については、Taylor 級数近似に代わる Padé 近似、中央点法、中間点法を用いて反応度価値を計算し、これらの手法の適用性を評価した。残念ながら、これらの手法を用いても、Taylor 級数近似と同程度の精度の解しか得られず、依然参照解とは 10% 程度の差異があり、TCA 炉心におけるサンプル反応度価値問題をモンテカルロ法で精度良く計算することは、今後の課題である。しかしながら、Padé 近似は、Taylor 級数近似に比べて以下の利点があることが分かった。

- Padé 近似は、大きい摂動量に対しても安定した解を得ることができる。Taylor 級数近似は、摂動量が 100% を超えると解が振動する可能性があるが、Padé 近似は、大きい摂動量に対しても安定した解を得ることができる。
- 低次の Padé 近似は、高次の Taylor 級数近似と同程度の精度の結果を与える。

以上より、現状では、微分演算子サンプリング法で微分係数を評価し、Padé 近似でサンプル反応度価値問題を評価するのが最も良い手法であると言える。

第 5 章では、Meulekamp らと名内らによって提案された、次世代核分裂確率に基づく実効遅発中性子割合の計算手法について、理論的な考察を行うとともに、これらの手法を連続エネルギーモンテカルロコードに実装することにより、数値的な比較を行った。その結果、これらの手法で計算される実効遅発中性子割合は、小林によって定義されたインポートランス関数 (核分裂源のない輸送方程式に対する随伴グリーン関数) で重み付けられた遅発中性子割合であることを、理論的かつ数値的に証明した。即ち、これらの手法は、通常定義される実効遅発中性子割合  $\beta_{\text{eff}}$  に対する近似的手法であり、物理的には、次世代核分裂確率に基づいて遅発中性子割合を計算していることを明らかにした。また、これらの近似的手法は、多くの



体系の  $\beta_{\text{eff}}$  に対して良い近似となるが、ウラン反射体付き高速炉炉心に対しては、5%以上の差異を生じ、良い近似となっている場合でも、重み関数のエネルギースペクトルや空間分布が、通常の随伴関数と異なる場合があり、近似手法の計算精度については注意が必要であることを明らかにした。

第6章では、微分演算子サンプリング法と相関サンプリング法を用いて実効遅発中性子割合  $\beta_{\text{eff}}$  を計算する、新たな手法を開発した。微分演算子サンプリング法を用いて  $\beta_{\text{eff}}$  を計算する新しい手法は、遅発中性子発生数に摂動を加え、そのときの摂動系と非摂動系の固有値の差から核特性パラメータを評価する固有値法に対し、その極限値を微分演算子サンプリング法で計算する手法である。この手法は、第5章で考察した近似的手法とは異なり、全く近似を含まず、随伴中性子束で重み付けられた定義どおりの  $\beta_{\text{eff}}$  を計算することができる。相関サンプリング法を用いて  $\beta_{\text{eff}}$  を計算する新しい手法は、突然、遅発中性子が発生しなくなるという摂動を考え、そのときの摂動系と非摂動系の固有値の差から  $\beta_{\text{eff}}$  を計算する即発増倍率法(固有値法の1つ)に対し、固有値の差を相関サンプリング法で計算する手法である。相関サンプリング法を用いた新しい手法では、摂動系の中性子束を非摂動系の中性子束で近似するという、いわゆる、1次摂動近似が用いられている。エネルギースペクトル、重核種、裸と反射体付き体系の観点から、様々な体系を選択し、ベンチマーク計算を実施し、以下のことが明らかとなった。

- すべての体系において、微分演算子サンプリング法を用いて  $\beta_{\text{eff}}$  を計算する手法は、決定論的手法による参照解と統計誤差の範囲内で一致する。
- すべての体系において、相関サンプリング法を用いて  $\beta_{\text{eff}}$  を計算する手法は、微分演算子サンプリング法を用いる手法とほぼ同等の結果を与える。

以上の結果より、本研究で提案した、微分演算子サンプリング法を用いて  $\beta_{\text{eff}}$  を計算する手法を用いれば、随伴中性子束で重み付けられた定義どおりの  $\beta_{\text{eff}}$  が計算できることを数値的にも示した。本手法は、モンテカルロコードで微分演算子サンプリング法による1次微係数の計算機能があれば、実装は容易である。また、相関サンプリング法の機能がある場合にも、実装は容易で、微分演算子サンプリング法による手法とほぼ同等の結果が得られる。ただし、正確な評価をするためには、これらの摂動モンテカルロ手法で源摂動効果を評価する必要がある。

本研究で実施した摂動モンテカルロ計算手法に関する研究成果により、従来は、実効増倍率や反応率の計算にのみ適用されることの多かったモンテカルロ法を、微小反応度価値、サンプル反応度価値、実効遅発中性子割合の計算へ拡張できることを示した。中性子生成時間計算手法の開発については、本研究において実施しなかったが、第6章で開発した手法と同様にして連続エネルギーモンテカルロ法で計算できる可能性があり、今後の検討課題である。今後、本研究で開発した手法を用いて、これら核特性の参照解を計算することにより、炉物理実験解析や核設計計算に大いに役に立つものと期待される。また、計算機の更なる進歩によって、モンテカルロ法による燃焼計算、熱水力計算と結合したマルチフィジクス・モンテカルロ核計算が短時間で行えるようになり、本研究の成果を含めたモンテカルロ法計算手法の高度化によって、原子炉炉心解析に必要な核特性パラメータが連続エネルギーモンテカル



ロ法で計算できるようになれば、モンテカルロ法を用いた数値炉物理臨界実験や核設計計算が現実的なものになることが期待される。

## 参考文献

- [1] G. Buffon, “Essai d’arithmétique morale.” *Histoire naturelle, générale et particulière*, Supplément 4, pp.100-104 (1777).
- [2] Lord J. W. S. Rayleigh, “On James Bernoulli’s theorem in probabilities,” *Philosophical Magazine*, **47**, pp.246-251 (1899).
- [3] Lord Kelvin, “Nineteenth Century Clouds over the Dynamical Theory of Heat and Light,” *Philosophical Magazine*, Vol. 2, No. 6, pp.1-40 (1901).
- [4] R. Courant, K. Friedrichs, H. Lewy, “Über die Partiellen Differenzengleichungen der Mathematischen Physik, *Math. Annalen*, **100**, pp.32-74 (1928); translated into English by P. Fox, NYO-7689, ABC Computing Facility, Institute of Mathematical Sciences, New York University (1956).
- [5] A. Kolmogorov, “Über die Analytischen Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung, *Math. Annalen*, **104**, pp.415-458 (1931).
- [6] I. Petrowsky, “Über das Irrfahrtproblem,” *Math. Annalen*, **109**, pp.425-444 (1933).
- [7] S. Ulam, R. D. Richtmyer, J. von Neumann, “Statistical methods in neutron diffusion,” LAMS-551 (1947).
- [8] N. Metropolis, S. Ulam, “The Monte Carlo Method,” *Journal of the American Statistical Association*, **44**, pp.335-341 (1949).
- [9] N. Metropolis, “The beginning of the Monte Carlo Method,” Los Alamos Science Special Issue (1987).
- [10] K. Smith, “Reactor Core Methods,” Invited lecture at Int. Conf. M& C 2003: Nuclear Mathematical and Computational Sciences: a Century in Review - a Century Anew, Apr. 6-10, 2003, Gatlinburg, TN, USA (2003); <http://www.nea.fr/html/dbprog/documents/MC03Smith.pdf>
- [11] <http://www.casl.gov/>
- [12] “CASL: The Consortium for Advanced Simulation of Light Water Reactors,” CASL-2011-0137-000-P (2011), <http://www.casl.gov/docs/CASL-2011-0137-000-P.pdf>

- [13] “CASL: The Consortium for Advanced Simulation of Light Water Reactors,” CASL-2010-0022-001-P (2010), <http://www.casl.gov/docs/CASL-2010-0022-001-P.pdf>
- [14] <http://www.nuresim.com/>
- [15] C. Chauliac, J. M. Aragones, D. Bestion, M. Zimmermann, D. Cacuci, N. Crouzet, “NURESIM, Final Activity Report (FAR),” (2009).
- [16] <http://www.nurisp.eu/>
- [17] J. Spanier, E. M. Gelbard, “Monte Carlo Principles and Neutron Transport Problem,” Addison-Wesley Publishing Company (1969).
- [18] H. Rief, “A synopsis of Monte Carlo perturbation algorithms,” *J. Comput. Phys.*, **111**, 33 (1994).
- [19] G. R. Keepin, “Physics of Nuclear Kinetics,” Addison-Wesley Publishing Company, Inc. (1965).
- [20] H. Hurwitz Jr., “Physical interpretation of the adjoint flux: iterated fission probability,” in: A. Radkowsky (Ed.), Naval Reactors Physics Handbook, Vol. I, Naval Reactors, Division of Reactor Development, United States Atomic Energy Commission, pp.864-869 (1964).
- [21] R. K. Meulekamp, S. C. Van der Marck, “Calculating the effective delayed neutron fraction with Monte Carlo,” *Nucl. Sci. Eng.*, **152**, 142-148 (2006).
- [22] Y. Nauchi, T. Kameyama, “Proposal of direct calculation of kinetic parameters  $\beta_{eff}$  and  $\Lambda$  based on continuous energy Monte Carlo method,” *J. Nucl. Sci. Technol.*, **42**, 503-514 (2005).
- [23] G. I. Bell, S. Glasstone, “Nuclear Reactor Theory,” Van Nostrand Reinhold Company, New York (1970).
- [24] A. F. Henry, “Nuclear-Reactor Analysis,” The MIT Press (1975).
- [25] 小林啓祐, “原子炉物理,” コロナ社 (1996).
- [26] I. Lux, L. Kobolinger, “Monte Carlo Particle Transport Methods: Neutron and Photon Calculations,” CRC Press (1991).
- [27] Y. Nagaya, K. Okumura, T. Mori, M. Nakagawa, “MVP/GMVP II: General Purpose Monte Carlo Codes for Neutron and Photon Transport Calculations Based on Continuous Energy and Multigroup Methods,” JAERI 1348, Japan Atomic Energy Research Institute (JAERI) (2005).



- [28] X-5 Monte Carlo Team, "MCNP – A General Monte Carlo N-Particle Transport Code, Version 5," LA-UR-03-1987 (2003).
- [29] J. E. Olhoeft, "The Doppler Effect for a Non-Uniform Temperature Distribution in Reactor Fuel Elements," WCAP-2048 (1962).
- [30] H. Takahashi, "Monte Carlo Method for Geometrical Perturbation and its Application to the Pulsed Fast Reactor," *Nucl. Sci. Eng.*, **41**, 259 (1970).
- [31] H. Rief, "Generalized Monte Carlo perturbation algorithms for correlated sampling and a second-order Taylor series approach," *Ann. Nucl. Energy*, **11**[9], 455 (1984).
- [32] E. L. Kaplan, N. S. McCormick, "Monte Carlo Methods for Equilibrium Problems in Neutron Multiplication," UCRL 5275-T (1958).
- [33] W. Bernnat, "A Monte Carlo Technique for Local Perturbations in Multiplying Systems," ANL-75-2, 262 (1974).
- [34] H. Rief, "Stochastic Perturbation Analysis Applied to Neutral Particle Transport," *Advances in Nuclear Science and Technology*, **23**, 69 (1996).
- [35] F. X. Gallmeier, "A New MCNP Option: KCORR — The Use of the Correlated Sampling Method to Study Reactivity Effects Due to Changes of a Reactor Arrangement," *Nucl. Sci. Eng.*, **120**, 102 (1995).
- [36] M. Nakagawa, T. Asaoka, "Improvement of Correlated Sampling Monte Carlo Methods for Reactivity Calculations," *J. Nucl. Sci. Technol.*, **15**, 400 (1978).
- [37] T. Kitada, A. Yamane, T. Takeda "Improvement of the Correlated Sampling Method in Monte Carlo Perturbation Theory," *Proc. Int. Conf. on the Physics and Reactors PHYSOR96*, Mito, Ibaraki, Japan, Sep. 16-20, 1996, p.A-212 (1996).
- [38] H. Rief, "Review of Monte Carlo Techniques for Analyzing Reactor Perturbations," *Nucl. Sci. Eng.*, **92**, 289 (1986).
- [39] E. M. Gelbard, "Present Status and Future Prospects of Neutronics Monte Carlo," *Prog. Nucl. Energy*, **24**, 1 (1990).
- [40] Y. Nagaya, T. Mori, "Impact of Perturbed Fission Source on the Effective Multiplication Factor in Monte Carlo Perturbation Calculations," *J. Nucl. Sci. Technol.*, **42**[5], 428-441 (2005).
- [41] Y. Nagaya, T. Mori, "Evaluation of Perturbation Effect Due to Fission-Source Change in Eigenvalue Problems by Monte Carlo Methods," *Proc. of ANS International Topical Meeting on Advances in Reactor Physics and Mathematics and Computation into the Next Millennium PHYSOR2000*, May 7-12, 2000, Pittsburgh, Pennsylvania, USA (2000).

- [42] W. W. Engle, Jr., "A User Manual for ANISN, A One Dimensional Discrete Ordinates Transport Code with Anisotropic Scattering," K-1693 (1967).
- [43] R. J. LaBauve, "Bare, Highly Enriched Uranium Sphere (Godiva)," HEU-MET-FAST-001, Volume II, NEA/NSC/DOC(95)03/II, International Handbook of Evaluated Criticality Safety Benchmark Experiments, September 2003 Edition, Nuclear Energy Agency, OECD (2003).
- [44] J. D. Densmore, G. W. McKinney, J. S. Hendricks, "Correction to the MCNP Perturbation Feature for Cross-Section Dependent Tallies," LA-13374 (1997).
- [45] A. K. Hess, J. S. Hendricks, G. W. McKinney, L. L. Carter, "Verification of the MCNP Perturbation Correction Feature for Cross-Section Dependent Tallies," LA-13520 (1998).
- [46] T. Nakagawa, K. Shibata, S. Chiba, et al., "Japanese Evaluated Nuclear Data Library, Version 3, Revision 2," *J. Nucl. Sci. Technol.*, **32**, 1259 (1995).
- [47] Y. Miyoshi, T. Umamo, K. Tonoike, et al., "Critical Experiments on 10% Enriched Uranyl Nitrate Solution Using a 60-cm-Diameter Cylindrical Core," *Nucl. Technol.*, **118**, 69 (1996).
- [48] Y. Nagaya, T. Mori, "Estimation of Sample Reactivity Worth with Differential Operator Sampling Method," *Prog. Nucl. Sci. Technol.*, **2**, 842-850 (2011).
- [49] B. Morillon, "On the use of Monte Carlo perturbation in neutron transport problems," *Ann. Nucl. Energy*, **25**, 1095-1117 (1998).
- [50] K. F. Raskash, "An Improvement of the Monte Carlo Generalized Differential Operator Method by Taking into Account First- and Second-Order Perturbations of Fission Source," *Nucl. Sci. Eng.*, **162**, 158-166 (2009).
- [51] H. Tsuruta *et al.*, *Critical Sizes of Light-Water Moderated UO<sub>2</sub> and PuO<sub>2</sub>-UO<sub>2</sub> Lattices*, JAERI 1254, Japan Atomic Energy Research Institute (JAERI) (1978).
- [52] K. Shibata *et al.*, "Japanese Evaluated Nuclear Data Library Version 3 Revision-3: JENDL-3.3," *J. Nucl. Sci. Technol.*, **39**[11], 1125-1136 (2002).
- [53] OECD/NEA Nuclear Science Committee, "International Handbook of Evaluated Criticality Safety Benchmark Experiments," NEA/NSC/DOC(95)03, September 2008 Edition (2008), [CD-ROM].
- [54] T. Sakurai *et al.*, "Measurement and Analysis of Reactivity Worth of <sup>237</sup>Np Sample in Cores of TCA and FCA," *J. Nucl. Sci. Technol.*, **46**[6], 624-640 (2009).
- [55] G. A. Baker, Jr., *Essentials of Padé Approximants*, Academic Press, New York (1975).



- [56] J. E. Hoogenboom, "Methodology of Continuous-Energy Adjoint Monte Carlo for Neutron, Photon, and Coupled Neutron-Photon Transport," *Nucl. Sci. Eng.*, **143**, 99-120 (2003).
- [57] Y. Nagaya, G. Chiba, T. Mori, D. Irwanto, K. Nakajima, "Comparison of Monte Carlo calculation methods for effective delayed neutron fraction," *Ann. Nucl. Energy*, **37**, (2010).
- [58] K. Kobayashi, "Physical meaning of kinetics parameter "lifetime" used in the new multi-point reactor kinetics equations derived using Green's function," *Ann. Nucl. Energy*, **23**, 827-841 (1996).
- [59] L. L. Carter, E. D. Cashwell, "Particle-Transport Simulation with the Monte Carlo Method," Technical Information Center, U. S. Energy Research and Development Administration, TID-26607 (1975).
- [60] K. Kobayashi, K. Nishihara, "Definition of subcriticality using the importance function for the production of fission neutrons," *Nucl. Sci. Eng.*, **136**, 272-281 (2000).
- [61] P. Nelson Jr., "Relationships between various definitions of prompt-neutron lifetime," *Nucl. Sci. Eng.*, **43**, 154-158 (1971).
- [62] G. Chiba, "Calculation of effective delayed neutron fraction using a modified k-ratio method," *J. Nucl. Sci. Technol.*, **46**, 399-402 (2009).
- [63] G. Chiba, "Criticality Calculations with Fission Spectrum Matrix," in: S. Chiba(Ed.), Proceedings of the 2008 Annual Symposium on Nuclear Data (NDS 2008), JAEA-Conf 2009-004 (2009).
- [64] G. Chiba, "Calculations of Kobayashi Benchmark Problems with a Neutron Transport Simulation Code System CBG," JAEA-Research 2009-012 (2009), [in Japanese].
- [65] T. Hazama, G. Chiba, K. Sugino, "Development of a fine and ultra-fine group cell calculation code SLAROM-UF for fast reactor analyses," *J. Nucl. Sci. Technol.*, **43**, 908-918 (2006).
- [66] K. Okumura, "SRAC2006: A Comprehensive Neutronics Calculation Code System," JAEA-Data/Code 2007-04 (2007).
- [67] H. Soodak, "Pile Kinetics," in: G. Goodman (Ed.), The Science and Engineering of Nuclear Power, Vol. II. Addison-Wesley Press, Inc., Cambridge, pp.89-102 (1949).
- [68] L. N. Ussachoff, "Equation for the Importance of Neutrons, Reactor Kinetics and the Theory of Perturbation," in: Proc. of the International Conference on the Peaceful Uses of Atomic Energy, Geneva, August 8-20, 1955, Vol. 5, United Nations, New York, pp.503-510 (1955).



- [69] A. M. Weinberg, E. P. Wigner, "The Physical Theory of Neutron Chain Reactors," The University of Chicago Press, Chicago (1958).
- [70] J. R. Lamarsh, "Introduction to Nuclear Reactor Theory," Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Massachusetts (1966).
- [71] G. I. Bell, S. Glasstone, "Nuclear Reactor Theory," Van Nostrand Reinhold Company, New York. (1970).
- [72] S. A. H. Feghhi, M. Shahriari, H. Afarideh, "Calculation of neutron importance function in fissionable assemblies using Monte Carlo methods," *Ann. Nucl. Energy*, **34**, 514-520 (2007).
- [73] S. A. H. Feghhi, M. Shahriari, H. Afarideh, "Calculation of the importance-weighted neutron generation time using MCNIC method," *Ann. Nucl. Energy*, **35**, 1397-1402 (2008).
- [74] Y. Nauchi, T. Kameyama, "Development of Calculation Technique for Iterated Fission Probability and Reactor Kinetic Parameters Using Continuous-Energy Monte Carlo Method," *J. Nucl. Sci. Technol.*, **47**, 977-990 (2010).
- [75] B. C. Kiedrowski, F. B. Brown, P. P. H. Wilson, "Adjoint-Weighted Tallies for  $k$ -Eigenvalue Calculations with Continuous-Energy Monte Carlo," *Nucl. Sci. Eng.*, **168**, 226-241 (2011).
- [76] K. F. Raskach, A. A. Blyskavka, "An experience of applying iterated fission probability method to calculation of effective kinetics parameters and keff sensitivities with Monte Carlo," in: *Proc. of PHYSOR 2010 – Advances in Reactor Physics to Power the Nuclear Renaissance*, Pittsburgh, Pennsylvania, USA, May 9-14, 2010, American Nuclear Society, LaGrange Park, Illinois (2010).
- [77] H. J. Shim, C. H. Kim, Y. Kim, "Estimation of adjoint-weighted kinetics parameters in Monte Carlo forward calculations," in: *Proc. of PHYSOR 2010 – Advances in Reactor Physics to Power the Nuclear Renaissance*, Pittsburgh, Pennsylvania, USA, May 9-14, 2010, American Nuclear Society, LaGrange Park, Illinois (2010).
- [78] Y. Nagaya, T. Mori, "Calculation of effective delayed neutron fraction with Monte Carlo perturbation techniques," *Ann. Nucl. Energy*, **38**, 254-260 (2011).
- [79] L. Bohl, S. G. Margolis, "Computation of parameters in the kinetics equations," in: A. Radkowsky (Ed.), *Naval Reactors Physics Handbook*, Vol. I, Naval Reactors, Division of Reactor Development, United States Atomic Energy Commission, pp.873-877 (1964).

- [80] B. Verboomen, W. Haeck, P. Baeten, “Monte Carlo calculation of the effective neutron generation time,” *Ann. Nucl. Energy*, **33**, 911-916 (2006).
- [81] M. M. Bretscher, “Evaluation of reactor kinetics parameters without the need for perturbation codes,” in: International Meeting on Reduced Enrichment for Research and Test Reactors, Jackson Hole, Wyoming, USA, October 5-10, 1997 (1997).





## 謝辞

本研究をまとめるにあたり、京都大学大学院工学研究科原子核工学専攻の中島健教授には、有益なご助言を賜わるとともに、長期にわたりご指導いただきました。心より深く感謝いたします。また、同専攻の福山淳教授と山本俊弘准教授には、論文全体について有益なご助言を戴きました。ここに深く感謝いたします。

本論文は、日本原子力研究所原子炉システム研究室の時代から、現在の日本原子力研究開発機構炉物理研究グループに至るまで、著者がずっと携わってきたモンテカルロコード MVP/GMVP の開発のために行ってきた研究の成果をまとめたものであり、MVP/GMVP コード開発者の皆様には、ここに深く感謝いたします。MVP/GMVP コードの創始者である中川正幸氏には、著者をモンテカルロ法研究の道へといざなっていただき、モンテカルロ法の基礎から原子炉物理、論文の書き方に至るまで、多大なるご助言とご指導いただきました。もうひとりの創始者である森貴正氏 (原子力機構) には、MVP/GMVP コード開発をはじめとして、モンテカルロ法全般にわたり、多大なるご助言、ご指導をいただきました。また、本研究の主要論文では、常に共著者となって頂き、数多くの貴重なご助言をいただきました。MVP コードの核データライブラリ作成に携わってこられた奥村啓介氏 (原子力機構) と金子邦男氏には、評価済み核データの処理につきまして、貴重なご助言をいただきました。MVP/GMVP コード開発に初めから携わっておられた故佐々木誠氏には、MVP/GMVP コードのアルゴリズムやソースコードについて、数多くの貴重なご助言を賜りました。

本研究は、著者が原子炉物理に関する研究グループに所属し、そこで行ってきた研究でもあります。著者と同じグループに所属されていた皆様には、数多くのご助言、ご協力を賜りました。また、関連する上司の方々には、本研究に対するご理解と暖かい励ましを賜りました。ここに深く感謝の意を表します。京都大学工学部原子核工学専攻の卒業論文と大学院原子核工学専攻修士課程の修士論文では、京都大学名誉教授の小林啓祐先生にご指導いただくとともに、原子炉物理全般と炉心解析手法について、多大なるご助言、ご指導を賜りました。この頃に学んだ知識が、第5章で活かされています。著者を日本原子力研究所 (現、日本原子力研究開発機構) における炉物理研究の道へと導いていただきました故土橋敬一郎氏には、炉物理研究の基礎、コード開発についてご指導いただきました。千葉豪氏 (元、原子力機構、現、北海道大学) には、第5章と第6章における決定論的手法に基づく計算でご協力いただきました。

本研究を遂行するにあたり、著者と係わりのありました数多くの方々に、この場を借りまして心より感謝の意を表します。著者と同じ粒子輸送モンテカルロ法の研究を長年行ってきた植木太郎氏 (元、米国ニューメキシコ大学助教授、現、原子力機構) には、著者の拙い論文を深くご理解頂き、示唆に富んだご助言を賜りました。著者が1年間米国に滞在する際、MCNP チームでのホストを引き受けていただきました F. B. Brown 氏 (米国ロスアラモス国

立研究所) には、モンテカルロ法に関わる数多くの有益なご助言をいただきました。京都大学名誉教授の木村逸郎先生には、京都大学大学院を修士で卒業して以来、博士論文をまとめるよう絶えず励ましていただきました。京都大学大学院工学研究科元教授の森島信弘先生には、原子核工学専攻在学中から原子炉物理をご指導いただくとともに、卒業後も協力研究にて数多くのご助言を戴きました。

最後に、本研究を博士論文にまとめることを理解し、常に著者を支えてくれた妻の純子に感謝いたします。

2012 年 10 月

長家 康展